Technische Universität Berlin **WS 07/08**
Institut für Mathematik
Sekr. MA 7-5 / Frau Michel

Prof. Dr. Jochen Blath
Dipl.-Math. oec. Wiebke Wittmüß

6. Übung zur Finanzmathematik I

Abgabe: Dienstag, den 27.11.2007 (in der Vorlesung oder im Briefkasten vor dem MA 780)

1. Aufgabe (5 Punkte)
Analog zum Vorgehen in Lemma 4 zum Beweis des FTAP in der Vorlesung beweise man den folgenden Satz von Halmos-Savage:

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathcal{Q}$ eine Familie von Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf $(\Omega, \mathcal{F})$, die in folgendem Sinne zu $\mathbb{P}$ äquivalent sei (wir schreiben $\mathcal{Q} \approx \mathbb{P}$):

$$\mathbb{P}[A] = 0 \Leftrightarrow Q[A] = 0 \text{ für alle } Q \in \mathcal{Q}.$$

Dann existiert eine abzählbare Teilmenge $\widetilde{\mathcal{Q}} \subset \mathcal{Q}$ mit $\widetilde{\mathcal{Q}} \approx \mathbb{P}$.

2. Aufgabe (5 Punkte)
Sei $X_0 = 5$ und $\Delta X_k = X_k - X_{k-1}$ nehme die Werte $2, 0, -1$ an.

(i) $\mathcal{F}_k^X$ bezeichne die kleinste σ-Algebra, bezüglich derer $(X_i)_{i=0,\dots,k}$ meßbar ist. Man bestimme $\mathcal{F}_1^X$ und die Atome von $\mathcal{F}_2^X$.

(ii) Man zeichne den Baum, der zur Filtration $(\mathcal{F}_k^X)_{k=0,1,2,3}$ gehört. Wieviele Knoten enthält er?

3. Aufgabe (5 Punkte)
In Aufgabe 2 sei die Verteilung von ΔX_k gegeben durch

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[\Delta X_k = 2] &= \frac{1}{4}\\ \mathbb{P}[\Delta X_k = 0] &= \frac{1}{2}\\ \mathbb{P}[\Delta X_k = -1] &= \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Zudem seien $\Delta X_1, \Delta X_2, \Delta X_3$ unabhängig.

(i) Man ergänze den Baum aus 2(ii) mit Übergangswahrscheinlichkeiten und bestimme $\mathbb{P}[X_1 > X_0, X_3 = X_0]$ und $\mathbb{P}[X_1 = 4, X_3 > X_0]$.

(ii) Man berechne den Prozess $(\mathbb{E}\left[|X_3| \,\middle|\, \mathcal{F}_k^X\right])_{k=0,1,2,3}$.

4. Aufgabe (5 Punkte)
Wir betrachten einen Finanzmarkt im Einperiodenmodell mit einer riskanten Anlage S und einem Bond mit konstanter Verzinsung r. Die riskante Anlage hat zur Zeit 0 den Preis π und ihr Kurs S zur Zeit 1 ist eine diskrete Zufallsvariable mit Werten in $S^d = \min_\omega S(\omega)$ und $S^u = \max_\omega S(\omega)$. Weiterhin sei $S^d < (1+r)\pi < S^u$, also ist der Markt arbitragefrei. Wir betrachten eine Auszahlung H, die durch $H = h(S)$ mit $h \geq 0$ konvex gegeben ist. Man zeige, dass dann

$$\sup_{\mathbb{P}^* \in \mathcal{P}} \mathbb{E}^*\left[\frac{H}{1+r}\right] = \frac{h(S^u)}{1+r}\frac{(1+r)\pi - S^d}{S^u - S^d} + \frac{h(S^d)}{1+r}\frac{S^u - (1+r)\pi}{S^u - S^d}$$

gilt.