

7. Übung zur Finanzmathematik I

Abgabe: Dienstag, den 5.12.2007 (in der Vorlesung oder im Briefkasten vor dem MA 780)

1. Aufgabe (5 Punkte)

Sei ein Finanzmarkt mit zwei Anlagen gegeben. Die Anlagen werden wie üblich durch den an $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t=0, \dots, T}$ adaptierten Prozess $S = (S^0, S^1)$ modelliert.

(i) Welche der folgenden Prozesse sind bezüglich \mathbb{F} prävisibel, bzw. im Allgemeinen nicht prävisibel?

- (a) $\xi_t = I_{\{S_t^1 > S_{t-1}^1\}}$, $t = 1, \dots, T$
- (b) $(\xi_t)_{t=1, \dots, T}$ mit $\xi_1 = 1$, $\xi_t = I_{\{S_{t-1}^1 > S_{t-2}^1\}}$ für $t \geq 2$
- (c) $\xi_t = (I_A I_{\{t > n_0\}})$, $t = 1, \dots, T$ mit $A \in \mathcal{F}_{n_0}$, $n_0 \in \{0, \dots, T\}$
- (d) $\xi_t = I_{\{S_t^1 > S_0^1\}}$, $t = 1, \dots, T$
- (e) $(\xi_t)_{t=1, \dots, T}$ mit $\xi_1 = 1$, $\xi_t = 2\xi_{t-1} I_{\{S_t^1 < 1\}}$ für $t \geq 2$

(ii) Sei $S^0 \equiv 1$. Wie aus der Vorlesung bekannt, gibt es zu einem prävisiblen Prozess ξ genau eine selbstfinanzierende Strategie $\tilde{\xi}$ mit $V_0 = 1$. Interpretiere die risikolose Anlage S^0 als Bankkonto und die riskante Anlage S^1 als Aktie und beschreibe die Prozesse aus (i) verbal.

2. Aufgabe (5 Punkte)

Sei $T \in \mathbb{N}$ und S die symmetrische Irrfahrt auf \mathbb{Z} . Wir betrachten folgenden Prozess ξ : $\xi_1 = 1$ und $\xi_t = 2\xi_{t-1} I_{\{S_{t-1} < S_{t-2}\}}$ für $t \geq 2$.

(i) Man zeige, dass ξ prävisibel ist und beschreibe die Strategie ξ verbal.

(ii) Man bestimme $G_T(\xi)$, $\mathbb{E}[G_T(\xi)]$ und $\text{Var}[G_T(\xi)]$.

3. Aufgabe (5 Punkte)

Sei $\Omega = \{-1, 1\}^T$ mit $T \in \mathbb{N}$, $\mathcal{F} = 2^\Omega$ und \mathbb{P} eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf (Ω, \mathcal{F}) , die allen Atomen eine positive Wahrscheinlichkeit zuordnet. Sei Y der Koordinatenprozess auf Ω , d.h. $Y_i(\omega) = \omega(i)$. Man betrachte nun einen Finanzmarkt auf diesem Wahrscheinlichkeitsraum mit einer Anlage, deren Kurs sich wie folgt entwickelt:

$$S_t = S_0 \exp\left(\sigma \sum_{i=1}^t Y_i + mt\right),$$

wobei S_0 und $0 \leq |m| < \sigma$ Konstanten sind. Man zeige:

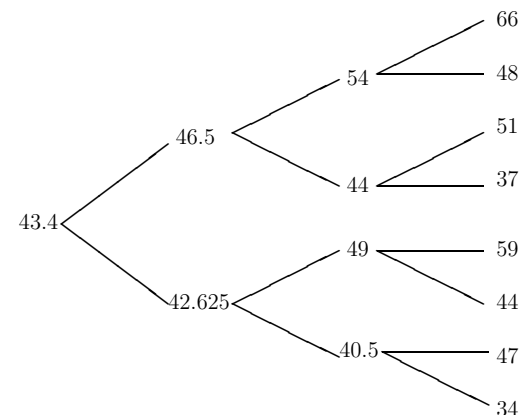
- a) Es gibt genau ein Martingalmaß \mathbb{P}^* .
- b) Jedes Martingal $M = (M_t)_{t=0, \dots, T}$ bezüglich \mathbb{P}^* ist von der Form

$$M_t = M_0 + \sum_{i=0}^t \xi_i (S_i - S_{i-1}).$$

c) Der faire Preis für eine Auszahlung $H \geq 0$ ist $\mathbb{E}^*[H]$.

4. Aufgabe (5 Punkte)

Wir betrachten einen Finanzmarkt mit einer Aktie, einer risikolosen Anleihe mit $r = 0$ und $T = 3$. Der Kurs der Aktie entwickelt sich nach untenem Schema.



- a) Man bestimme ein äquivalentes Martingalmaß.
- b) Sei H eine asiatische Put-Option, d.h.

$$H = \left(\frac{1}{T+1} \sum_{t=0}^T S_t - S_T \right)^+.$$

Man berechne den Wert dieser Put-Option.