Technische Universität Berlin **WS 07/08**
Institut für Mathematik
Sekr. MA 7-5 / Frau Michel

Prof. Dr. Jochen Blath
Dipl.-Math. oec. Wiebke Wittmüß

8. Übung zur Finanzmathematik I

Abgabe: Dienstag, den 11.12.2007 (in der Vorlesung oder im Briefkasten vor dem MA 780)

1. Aufgabe (5 Punkte)
Seien $Q \ll \mathbb{P}$ zwei Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t))$.

a) Man zeige, dass der Dichteprozess (Z_t), definiert als

$$Z_t = \frac{dQ|_{\mathcal{F}_t}}{d\mathbb{P}|_{\mathcal{F}_t}} \qquad \text{für } t = 0, 1, \ldots, T$$

ein Martingal ist, und dass

$$\frac{dQ}{d\mathbb{P}}\bigg|_{\mathcal{F}_t} = Z_t = \mathbb{E}[\, Z_T \mid \mathcal{F}_t \,], \qquad t = 0, 1, \ldots, T.$$

b) Man beweise die Bayes-Formel für bedingte Erwartungen: Mit dem Dichteprozess aus a) gilt für $0 \le s \le t \le T$ und eine $\mathcal{F}_t$-messbare Zufallsvariable $X \ge 0$, dass

$$\mathbb{E}_Q[\, X \mid \mathcal{F}_s \,] = \frac{1}{Z_s} \mathbb{E}[\, Z_t X \mid \mathcal{F}_s \,] \qquad Q-\text{f.s.}$$

2. Aufgabe (5 Punkte)
Sei

$$C = \left(\frac{1}{|\mathbb{T}|} \sum_{t \in \mathbb{T}} S_t^1 - K \right)^+$$

ein average-price Asian call (vergleiche die Vorlesung) und ein S^0 ein Numéraire mit wachsenden Pfaden. Für jedes $\mathbb{P}^* \in \mathcal{P}$ gilt dann

$$\mathbb{E}^*\Big[\frac{1}{S_T^0} C \Big] \le \frac{1}{|\mathbb{T}|} \sum_{t \in \mathbb{T}} \mathbb{E}^*\Big[\frac{1}{S_t^0} (S_t^1 - K)^+ \Big],$$

d.h. der zugehörige arbitragefreie Preis für C ist geringer als der Preis eines Portfolios

$$\frac{1}{|\mathbb{T}|} \sum_{t \in \mathbb{T}} (S_t^1 - K)^+$$

europäischer Call-Optionen.

3. Aufgabe (5 Punkte)
Seien Y_t, $t = 1, \ldots, T$, unabhängige, identisch verteilte, zentrierte Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Wir betrachten die von $(Y_t)_{t=1,\ldots T}$ erzeugte Filtration $(\mathcal{F}_t = \sigma(Y_1, \ldots, Y_t))_{t=0,\ldots,T}$ und den Prozess

$$X_t^0 \equiv 1, \quad X_0^1 := 1, \quad X_t^1 := X_0^1 + \sum_{s=1}^t Y_s, \; t = 1, \ldots, T.$$

Nun erweitern wir die Filtration um die durch den Endwert X_T^1 gegebene "Insiderinformation", das heißt, wir betrachten $\tilde{\mathbb{F}} = (\tilde{\mathcal{F}}_t := \sigma(\mathcal{F}_t, X_T^1))_{t=0,\ldots,T}$. Man zeige:

a) $(X_t^1)_{t=0,\ldots,T}$ ist zwar ein Martingal bezüglich der Filtration $\mathbb{F}$, aber nicht bezüglich der Filtration $\tilde{\mathbb{F}}$. Dafür ist der Prozess

$$\tilde{X}_t := X_t^1 - \sum_{s=0}^{t-1} \frac{X_T^1 - X_s^1}{T - s}, \quad t = 0, \ldots, T$$

ein $\tilde{\mathbb{F}}$-Martingal.

b) Mit der Information über X_T^1 sind Wertprozesse mit positiver Gewinnerwartung möglich. Man bestimme eine selbstfinanzierende Strategie $\bar{\xi}$, die unter allen $\tilde{\mathbb{F}}$-prävisiblen Strategien mit $|\xi_t^1| \le 1$, $t = 1, \ldots, T$ den zu erwartenden Gewinn $\mathbb{E}[\, G_T \,]$ für

$$G_T = \sum_{s=1}^T \xi_s^1 (X_s^1 - X_{s-1}^1)$$

maximiert.

4. Aufgabe (5 Punkte)
Mit $\mathbb{P}_z^*$, $z > 0$, bezeichnen wir eine Familie von Martingalmaßen, unter denen

$$X_T = X_T^1 = S_T^1 / S_T^0$$

eine log-normale Verteilung der Form

$$X_T = z \exp\Big(\sigma \sqrt{T} Y - \frac{1}{2} \sigma^2 T \Big)$$

besitzt, wobei Y eine standardnormalverteilte Zufallsvariable ist. Insbesondere gilt $X_0 = z$ $\mathbb{P}_z^*$-f.s.

Man zeige

$$\mathbb{E}_z^*[\, (X_T - K)^+ \,] = zK \mathbb{E}_{1/z}^*[\, (1/K - X_T)^+ \,] = \mathbb{E}_K^*[\, (z - X_T)^+ \,]$$

indem man einen Wechsel des Numéraire von S^0 nach S^1 vollzieht und die Verteilung von $1/X_T$ unter $\tilde{\mathbb{P}}_z^*$ mit $d\tilde{\mathbb{P}}_z^* / d\mathbb{P}_z^* = X_T / X_0$ berechnet.