**Technische Universität Berlin** **WS 07/08**
**Institut für Mathematik**
Sekr. MA 7-5 / Frau Michel

Prof. Dr. Jochen Blath
Dipl.-Math. oec. Wiebke Wittmüß

# 9. Übung zur Finanzmathematik I

**Abgabe: Dienstag, den 18.12.2007** (in der Vorlesung oder im Briefkasten vor dem MA 780)

**1. Aufgabe** (5 Punkte)
Wir betrachten ein multiplikatives Trinomialmodell. Die Anlage $S^0$ sei konstant 1 und die Anlage $S^1$, deren Startwert $S_0^1$ ist, entwickelt sich nach folgender Gleichung:

$$S_t^1 = S_0^1 \prod_{k=1}^{t} Y_k, \text{ für } t = 0, \ldots, T,$$

mit u.i.v. Inkrementen $Y_i$. Für die Inkremente gilt weiterhin $\mathbb{P}[Y_1 = U] = p_1$, $\mathbb{P}[Y_1 = D] = p_2$, $\mathbb{P}[Y_1 = M] = p_3$, wobei $0 < p_i < 1$, $\sum_{i=1}^{3} p_i = 1$, $0 < D < M < U$, $UD = 1 = M$ und $D < 1 < U$. Die Filtration $(\mathcal{F}_t)$ sei von $S$ erzeugt.

a) Man bestimme alle äquivalenten Martingalmaße $Q$ für $S$ durch Angabe der Übergangswahrscheinlichkeiten $Q[Y_{t+1} = x|\mathcal{F}_t]$, $x \in \{D, M, U\}$. Man gebe die Fälle an, in denen die $Y_i$ unter $Q$ wieder u.i.v. sind.

b) Man bestimme für $T = 2$ ein äquivalentes Martingalmaß $Q_0$ für $S$, unter dem die $Y_i$ nicht mehr unabhängig sind.

**2. Aufgabe** (5 Punkte)

a) Es seien u.i.v. Zufallsvariablen $Y_1, \ldots, Y_T$ mit $\mathbb{E}[Y_1] = 0$ und $Var[Y_1] = 1$ gegeben. Man zeige, dass der Prozess $X = (X_t)_{t=0,1,\ldots,T}$ definiert durch

$$X_t = \sum_{i=1}^{t} (Y_i)^2 - t$$

ein Martingal bezüglich der von $X$ erzeugten Filtration ist.

b) Sei $T \in \mathbb{N}$ und $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t=0,\ldots,T}, \mathbb{P})$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum und $M$ ein quadratintegrierbares Martingal. Man zeige, dass dann $M^2$ ein Submartingal ist.

**3. Aufgabe** (5 Punkte)
Wir betrachten einen arbitragefreien Markt. Die Anlage $S^0$ sei konstant 1. Wir wissen, dass die Menge $\mathcal{P}$ der äquivalenten Martingalmaße nicht leer ist. Seien nun $Q \in \mathcal{P}$ und $k \in \{0, 1, \ldots, T\}$ fest. Dann definieren wir die Menge $\mathcal{Z}_k$ als Menge aller Dichteprozesse $Z = (Z_t)_{t=0,1,\ldots,T}$ eines Maßes $R \in \mathcal{P}$ bezüglich $Q$, für die gilt, dass $Z_j = 1$ für $j = 0, 1, \ldots, k$.

Man zeige, dass für $A \in \mathcal{F}_k$ und $Z, \tilde{Z} \in \mathcal{Z}_k$ auch $ZI_A + \tilde{Z}I_{A^C}$ in $\mathcal{Z}_k$ ist.

**4. Aufgabe** (5 Punkte)
Wir betrachten ein Binomialmodell mit $T = 28$. Die *Weihnachtsbaum-Option* ist wie folgt definiert: In den Zeitpunkten $2, 7, 12, 16, 21$ und $26$ erhält man je eine Million Euro, sofern der Kurs zur Zeit 14 außer im 5. und im 10. Schritt immer steigt und anschließend außer im 19. und 24. Schritt immer fällt. (Da wir immer nur Auszahlungen im Endzeitpunkt betrachtet haben, erhalte man die Zahlungen erst in $T$, aber verzinst mit $r$.)

a) Man erkläre den Namen der Option anhand einer geeigneten Graphik.

b) Bestimme den Wert dieser Option für $b = 0.1$, $a = -0.1$ und $r = 0.05$.