Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Stefan Felsner
Andrea Hoffkamp

Wintersemester 2007/08
11. Februar 2008

Klausur zur Linearen Algebra I

Name: ______________________ Vorname: ______________________

Matr.-Nr.: ______________________ Studiengang: ______________________

Für die Klausur sind **keine** Hilfsmittel erlaubt. Die Lösungen zum Definitions- und Aufgabenteil sind lesbar (!) auf separaten Blättern zu erstellen. Es gibt insgesamt 40 Punkte. Die Klausur ist bestanden, wenn mindestens 9 Punkte in den Aufgaben 1 bis 4 **sowie** mindestens 11 Punkte in den Aufgaben 5 bis 7 erreicht sind. Zur Nachklausur ist zugelassen, wer insgesamt mindestens 8 Punkte erreicht.

Einverständniserklärung: Hiermit willige ich ein, dass mein Klausurergebnis unter Angabe meiner Matrikelnummer auf der Vorlesungswebseite veröffentlicht wird.

Unterschrift: ....

Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$	6	7	8	$\sum$
Punkte									

Definitionen

Geben Sie jeweils die vollständige Definition an. Dabei müssen alle Voraussetzungen formuliert werden; geben Sie z.B. zu jeder Variablen die Menge an, aus der sie stammt.

Aufgabe 1 (1+1+1 Punkte)
Definieren Sie die folgenden Begriffe:

a) Lineare Unabhängigkeit

b) Lineares Erzeugnis (”Spann”)

c) Basis

Aufgabe 2 (1+1+1 Punkte)

a) Definieren Sie den Begriff *Determinante* einer Matrix.

b) In welcher Beziehung stehen die Determinante einer Matrix und der Rang einer Matrix (ohne Beweis!)?

c) Wie lautet die Leibnizformel zur Berechnung der Determinante einer Matrix?

Aussagen

Für jedes richtige Kreuz erhalten Sie einen Pluspunkt, für jedes falsche Kreuz einen Minuspunkt. Es können jedoch keine negativen Gesamtpunktzahlen pro Aufgabe entstehen!

Aufgabe 3 (6 Punkte)
Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum, U, W Unterräume von V und $v, w \in V$. Kreuzen Sie die richtigen Implikationen bzw. die richtigen Aussagen an.

	wahr	falsch
(a) Ist $\dim_K U + \dim_K W = \dim_K V$, dann ist $V = U \oplus W$.	◯	◯
(b) Ist B_U eine Basis von U und B_W eine Basis von W, dann ist $B_U \cup B_W$ eine Basis von $U + W$.	◯	◯
(c) Ist $\dim_K V = 8$, $\dim_K U = 6$ und $\dim_K W = 3$, dann weiß man $8 \geq \dim_K(U + W) \geq 6$.	◯	◯

	$\Rightarrow$	$\Leftarrow$	
(d) $v + U = 0 + U$	◯	◯	$v = 0$
(e) v und w linear unabhängig	◯	◯	$v + U$ und $w + U$ linear unabhängig

(f) Sei $V = \mathbb{R}^3$ und $U = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}((1, 0, 0), (0, 1, 0))$.

Kreuzen Sie an, welche der folgenden Mengen eine Basis von V/U ist.

◯ $\{(1, 1, 0) + U\}$ ◯ $\{(1, 0, 0) + U, (0, 1, 0) + U\}$ ◯ $\{(0, 0, 1) + U\}$

Aufgabe 4 (6 Punkte)
Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr oder falsch sind:

	wahr	falsch
(a) Wenn die Spalten einer Matrix linear abhängig sind, so sind es auch ihre Zeilen.	◯	◯
(b) Der Spaltenraum einer 3×3-Matrix ist gleich dem Zeilenraum.	◯	◯
(c) Der Spaltenraum einer 3×3-Matrix hat dieselbe Dimension wie der Zeilenraum.	◯	◯
(d) Die Spalten einer Matrix bilden eine Basis des Spaltenraums.	◯	◯

Es sei A eine 6×4-Matrix über $\mathbb{R}$. Kreuzen Sie an:

	wahr	falsch
(e) Hat A maximalen Rang, dann ist $\mathrm{rg} A = 6$.	◯	◯
(f) Der Kern von A hat die Dimension 3, wenn A den Rang 1 hat.	◯	◯

Aufgaben

Die Rechnungen und Beweise sind (wie üblich) auszuformulieren. Alles ist zu begründen und alle benutzten Symbole sind zu erklären.

Aufgabe 5 (2+2+2+2+3 Punkte)
Sei $\mathbb{R}[x]_2 = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 \mid a_i \in \mathbb{R}\}$ der Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2 über $\mathbb{R}$. Eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}^3$ sei definiert durch
$f(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (a_2, a_0 - a_1 + 2a_2, a_0 - a_1 - a_2)$.

a) Sei $\mathcal{A} = (1, x, x^2)$ die kanonische Basis von $\mathbb{R}[x]_2$ und $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ die kanonische Basis von $\mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie die darstellende Matrix $M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(f)$ von f bzgl. der Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$.

b) Bestimmen Sie das Bild von f. Geben Sie eine Basis von $\mathrm{Im}f$ und die Dimension von $\mathrm{Im}f$ an!

c) Bestimmen Sie den Kern von f. Geben Sie eine Basis von $\mathrm{Kern}f$ und die Dimension von $\mathrm{Kern}f$ an!

d) Ist f injektiv? Ist f surjektiv?

e) Sei $\mathcal{B}' = (b_1, b_2, b_3)$ mit $b_1 = e_1 + e_2, b_2 = e_2 + e_3, b_3 = e_1 + e_3$ eine weitere Basis von $\mathbb{R}^3$.

   Bestimmen Sie die Koordinaten von $f(5 + 3x - x^2)$ bzgl. der Basis $\mathcal{B}'$.

Aufgabe 6 (5 Punkte)
Für welche Zahlen $c \in \mathbb{R}$ ist das reelle lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcl} x_1 & - & cx_2 & = & 1 \\ (c-1)x_1 & - & 2x_2 & = & 1 \end{array}$$

a) eindeutig lösbar,

b) lösbar, aber nicht eindeutig

c) nicht lösbar?

Aufgabe 7 (2+4 Punkte)

a) Sei V ein K-Vektorraum. Zeigen Sie: Ist $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V, dann ist auch $(v_1, v_1 + v_2, v_1 + v_2 + v_3, \ldots, v_1 + \ldots + v_n)$ eine Basis von V.

b) Seien V, W K-Vektorräume und $F \in \mathrm{Hom}(V, W)$. Sei $\{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$ und sei $w_i = F(v_i) \in W$ für $i = 1, \ldots, n$. Beweisen oder widerlegen Sie:

   (i) Ist $\{v_1, \ldots, v_n\}$ linear unabhängig, dann ist auch $\{w_1, \ldots, w_n\}$ linear unabhängig.

   (ii) Ist $\{w_1, \ldots, w_n\}$ linear unabhängig, dann ist auch $\{v_1, \ldots, v_n\}$ linear unabhängig.