Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Stefan Felsner
Andrea Hoffkamp

Wintersemester 2007/08
11. Februar 2008

Lösungsskizzen zur Klausur zur Linearen Algebra I

Definitionen

Aufgabe 1 (1+1+1 Punkte)
Definieren Sie die folgenden Begriffe:

a) Lineare Unabhängigkeit:

Sei V ein K-Vektorraum. $\{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$ heisst linear unabhängig, falls aus $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k v_k = 0$ mit $\lambda_k \in K$ stets folgt $\lambda_k = 0$ für alle $k = 1, \ldots, n$.

b) Lineares Erzeugnis ("Spann"):

Sei V ein K-Vektorraum und $\{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$. Das lineare Erzeugnis der Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ ist die Menge aller Linearkombinationen dieser Vektoren, also $\operatorname{span}_K(v_1, \ldots, v_n) := \{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k v_k \mid \lambda_k \in K\}$.

c) Basis:

Sei V ein K-Vektorraum. $B = \{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$ heisst Basis von V, falls B linear unabhängig ist und $\operatorname{span}_K(B) = V$ gilt.

Aufgabe 2 (1+1+1 Punkte)

a) Definieren Sie den Begriff *Determinante* einer Matrix:

Sei $M_K(n, n)$ die Menge aller $n \times n$-Matrizen über dem Körper K.

Eine Abbildung $\det : M_K(n, n) \to K$ heisst Determinante, falls gilt

- det ist linear in jeder Zeile.
- det ist alternierend, d.h. besitzt eine Matrix $A \in M_K(n, n)$ zwei gleiche Zeilen, so ist $\det A = 0$.
- det ist normiert, d.h. $\det E_n = 1$.

b) In welcher Beziehung stehen die Determinante einer Matrix und der Rang einer Matrix (ohne Beweis!)?:

Für $A \in M_K(n, n)$ gilt: $\det A \neq 0 \iff \operatorname{rg} A = n$.

c) Wie lautet die Leibnizformel zur Berechnung der Determinante einer Matrix?:

Für $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n} \in M_K(n, n)$ ist $\det A = \sum_{\pi \in S_n} (\operatorname{sgn} \pi) a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n\pi(n)}$.

Aussagen

Aufgabe 3 (6 Punkte)
Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum, U, W Unterräume von V und $v, w \in V$. Kreuzen Sie die richtigen Implikationen bzw. die richtigen Aussagen an.

	wahr	falsch
(a) Ist $\dim_K U + \dim_K W = \dim_K V$, dann ist $V = U \oplus W$.	$\bigcirc$	$\otimes$
(b) Ist B_U eine Basis von U und B_W eine Basis von W, dann ist $B_U \cup B_W$ eine Basis von $U + W$.	$\bigcirc$	$\otimes$
(c) Ist $\dim_K V = 8$, $\dim_K U = 6$ und $\dim_K W = 3$, dann weiß man $8 \geq \dim_K(U + W) \geq 6$.	$\otimes$	$\bigcirc$

	$\Rightarrow$	$\Leftarrow$	
(d) $v + U = 0 + U$	$\bigcirc$	$\otimes$	$v = 0$
(e) v und w linear unabhängig	$\bigcirc$	$\otimes$	$v + U$ und $w + U$ linear unabhängig

(f) Sei $V = \mathbb{R}^3$ und $U = \operatorname{span}_{\mathbb{R}}((1, 0, 0), (0, 1, 0))$.

Kreuzen Sie an, welche der folgenden Mengen eine Basis von V/U ist.

$\bigcirc$ $\{(1, 1, 0) + U\}$ $\quad$ $\bigcirc$ $\{(1, 0, 0) + U, (0, 1, 0) + U\}$ $\quad$ $\otimes$ $\{(0, 0, 1) + U\}$

Aufgabe 4 (6 Punkte)
Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr oder falsch sind:

	wahr	falsch
(a) Wenn die Spalten einer Matrix linear abhängig sind, so sind es auch ihre Zeilen.	$\bigcirc$	$\otimes$
(b) Der Spaltenraum einer 3×3-Matrix ist gleich dem Zeilenraum.	$\bigcirc$	$\otimes$
(c) Der Spaltenraum einer 3×3-Matrix hat dieselbe Dimension wie der Zeilenraum.	$\otimes$	$\bigcirc$
(d) Die Spalten einer Matrix bilden eine Basis des Spaltenraums.	$\bigcirc$	$\otimes$

Es sei A eine 6×4-Matrix über $\mathbb{R}$. Kreuzen Sie an:

	wahr	falsch
(e) Hat A maximalen Rang, dann ist $\operatorname{rg} A = 6$.	$\bigcirc$	$\otimes$
(f) Der Kern von A hat die Dimension 3, wenn A den Rang 1 hat.	$\otimes$	$\bigcirc$

Aufgaben

Aufgabe 5 (2+2+2+2+3 Punkte)
Sei $\mathbb{R}[x]_2 = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \mid a_i \in \mathbb{R}\}$ der Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2 über $\mathbb{R}$. Eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}^3$ sei definiert durch
$f(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = (a_2, a_0 - a_1 + 2a_2, a_0 - a_1 - a_2)$.

a) Sei $\mathcal{A} = (1, x, x^2)$ die kanonische Basis von $\mathbb{R}[x]_2$ und $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ die kanonische Basis von $\mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie die darstellende Matrix $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(f)$ von f bzgl. der Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$.

Es ist $f(1) = (0,1,1)$, $f(x) = (0,-1,-1)$, $f(x^2) = (1,2,-1)$. Also ist

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

b) Bestimmen Sie das Bild von f. Geben Sie eine Basis von Imf und die Dimension von Imf an!

Imf ist gerade der Spaltenraum von $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(f)$. Da die ersten beiden Spalten offenbar linear abhängig sind, gilt Imf=span$\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$. Die Vektoren $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ sind offenbar linear unabhängig und deswegen eine Basis von Imf, also $\dim \mathrm{Im} f = 2$.

c) Bestimmen Sie den Kern von f. Geben Sie eine Basis von Kern$f$ und die Dimension von Kern$f$ an!

Es ist $f(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (a_2, a_0 - a_1 + 2a_2, a_0 - a_1 - a_2) = (0,0,0)$ genau dann, wenn $a_2 = 0$ und $a_0 = a_1$. Damit ist Kern$f$=span$(1+x)$, $\{1+x\}$ ist damit Basis von Kern$f$ und $\dim \mathrm{Kern} f = 1$.

d) Ist f injektiv? Ist f surjektiv?

f ist nicht injektiv, da Kern$f \neq \{0\}$. f ist nicht surjektiv, da $\dim \mathrm{Im} f = 2 < 3$.

e) Sei $\mathcal{B}' = (b_1, b_2, b_3)$ mit $b_1 = e_1 + e_2, b_2 = e_2 + e_3, b_3 = e_1 + e_3$ eine weitere Basis von $\mathbb{R}^3$.

Bestimmen Sie die Koordinaten von $f(5 + 3x - x^2)$ bzgl. der Basis $\mathcal{B}'$.

Aus den drei Gleichungen $b_1 = e_1 + e_2, b_2 = e_2 + e_3, b_3 = e_1 + e_3$ erhält man durch Umformungen: $e_1 = \frac{1}{2}(b_1 - b_2 + b_3)$, $e_2 = \frac{1}{2}(b_1 + b_2 - b_3)$ und $e_3 = \frac{1}{2}(-b_1 + b_2 + b_3)$. Damit ist die Transformationsmatrix

$$T_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Koordinaten von $f(5+3x-x^2)$ bzgl. der Basis $\mathcal{B}'$ erhält man durch Anwenden von $T_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$ auf $f(5 + 3x - x^2) = (-1, 0, 3)$. Es ergibt sich:

$$T_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6 (5 Punkte)
Für welche Zahlen $c \in \mathbb{R}$ ist das reelle lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcl} x_1 & - & cx_2 & = & 1 \\ (c-1)x_1 & - & 2x_2 & = & 1 \end{array}$$

a) eindeutig lösbar,

b) lösbar, aber nicht eindeutig

c) nicht lösbar?

Betrachte die erweiterte Koeffizientenmatrix $\begin{pmatrix} 1 & -c & 1 \\ c-1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Für $c \neq 1$ ist es erlaubt die erste Zeile mit $(1-c)$ zu multiplizieren und das Ergebnis zur zweiten Zeile zu addieren. Man erhält:

$$\begin{pmatrix} 1 & -c & 1 \\ 0 & -2+c(c-1) & 2-c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -c & 1 \\ 0 & (c+1)(c-2) & 2-c \end{pmatrix}$$

als Zeilenstufenform.

Für $c = -1$ ergibt die letzte Zeile "$0 = 3$", also ist das LGS in diesem Fall nicht lösbar.

Für $c = 2$ ist die letzte Zeile der erweiterten Koeffizientenmatrix eine Nullzeile. Das LGS ist dann lösbar, aber nicht eindeutig lösbar, da Rang der Matrix 1 ist.

Für $c = 1$ sieht die erweiterte Koeffizientenmatrix so aus: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Wegen $2 = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ ist das LGS in diesem Fall eindeutig lösbar.

Insgesamt ist das LGS also für alle $c \neq -1, 2$ eindeutig lösbar.

Aufgabe 7 (2+4 Punkte)

a) Sei V ein K-Vektorraum. Zeigen Sie: Ist $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V, dann ist auch $(v_1, v_1 + v_2, v_1 + v_2 + v_3, \ldots, v_1 + \ldots + v_n)$ eine Basis von V.

Da die Dimension von V gleich n ist, ist lediglich zu zeigen, dass die Vektoren $(v_1, v_1 + v_2, v_1 + v_2 + v_3, \ldots, v_1 + \ldots + v_n)$ linear unabhängig sind:

Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$, so dass $\lambda_1 v_1 + \lambda_2(v_1 + v_2) + \ldots + \lambda_n(v_1 + \ldots + v_n) = 0$.

Dann ist $0 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2(v_1 + v_2) + \ldots + \lambda_n(v_1 + \ldots + v_n)$
$= (\lambda_1 + \ldots + \lambda_n)v_1 + (\lambda_2 + \ldots + \lambda_n)v_2 + \ldots + (\lambda_{n-1} + \lambda_n)v_{n-1} + \lambda_n v_n$.

Da $(v_1, \ldots, v_n)$ linear unabhängig, folgt $\lambda_n = 0, \lambda_{n-1} + \lambda_n = 0, \ldots, \lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 0$. Daraus folgt, dass $\lambda_i = 0$ ist für alle $i = 1, \ldots, n$.

b) Seien V, W K-Vektorräume und $F \in \operatorname{Hom}(V, W)$. Sei $\{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$ und sei $w_i = F(v_i) \in W$ für $i = 1, \ldots, n$. Beweisen oder widerlegen Sie:

(i) Ist $\{v_1, \ldots, v_n\}$ linear unabhängig, dann ist auch $\{w_1, \ldots, w_n\}$ linear unabhängig.
Die Aussage ist falsch. Gegenbeispiel: $F : V \to W$ mit $F(v) = 0$ für alle $v \in V$.

(ii) Ist $\{w_1, \ldots, w_n\}$ linear unabhängig, dann ist auch $\{v_1, \ldots, v_n\}$ linear unabhängig.
Seien $\lambda_i \in K$ mit $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0$.
Dann ist $0 = F(0) = F(\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i v_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i F(v_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i w_i$ wegen der Linearität von F. Da $\{w_1, \ldots, w_n\}$ linear unabhängig, folgt $\lambda_i = 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$.