WS 2008/09 | Technische Universität Berlin
Prof. Dr. John M. Sullivan | Fakultät II
Kerstin Günther | Institut für Mathematik

Nachklausur Analysis II

06.04.2009

Name: Matr.-Nr.:
Vorname: Studiengang:

Mit der Veröffentlichung des Ergebnisses meiner Klausur (nur Matrikelnummer und Punktzahl) im Internet sowie am schwarzen Brett neben dem Raum MA 320 bin ich einverstanden:
Unterschrift (optional): ____________________

Geben Sie bei allen Antworten einen Beweis bzw. ein Gegenbeispiel an. Bitte beginnen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt und beschriften Sie dieses mit Ihrem Namen sowie Ihrer Matrikelnummer.
Die Klausur ist mit 18 Punkten bestanden. Die Bearbeitungszeit beträgt 105 Minuten. Schreiben Sie nicht mit Bleistift.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Summe
Punkte								
Korrektor								

Aufgabe 1 (9 Punkte)

(a) Sei M eine Menge, d_1, d_2 Metriken auf M, $a, b > 0$. Ist dann auch

$$d(x,y) := ad_1(x,y) + bd_2(x,y)$$

eine Metrik auf M?

(b) Sei $\mathbb{R}^2$ mit der ℓ^2-Norm versehen. Ist die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{für } (x,y) = (0,0), \\ \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

stetig bei $(0,0)$?

(c) Bestimmen Sie den Konvergenzradius von $\sum_{n=1}^{\infty} c^{(n^2)} x^n$ mittels der Definition, wobei $c \in \mathbb{R}$.

(d) Kann es eine surjektive stetige Abbildung $f : [2,3] \to \mathbb{R}$ geben?

(e) Es sei ℓ^1 der Vektorraum aller Folgen $x = (a_n)$, für die die Reihen absolut konvergent sind. Sind folgende Normen auf ℓ^1 äquivalent:

$$\|x\|_1 := \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|, \quad \|x\|_\infty := \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n| \ ?$$

Aufgabe 2 Sei $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ der Vektorraum aller stetigen Abbildungen von $[0,1]$ nach $\mathbb{R}$ und $X = \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ der Vektorraum aller stetig differenzierbaren Abbildungen von $[0,1]$ nach $\mathbb{R}$. Sei (6 Punkte)

$$\|f\| := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| + \sup_{x\in[0,1]} |f'(x)|, \quad f \in X.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|$ eine Norm auf X ist.

(b) Sei $(f_n) \subseteq X$ eine Cauchyfolge in X. Da $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ vollständig ist und (f_n), (f_n') Cauchyfolgen in $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ sind, existieren $f, f^\star \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ mit $f_n \to f$ und $f_n' \to f^\star$ in $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$. Definiere $\tilde{f}(x) := f(0) + \int_0^x f^\star(t)dt$. Dann gilt $\tilde{f} \in X$ und $(\tilde{f})' = f^\star$ (Hauptsatz der Differential- u. Integralrechnung).
Zeigen Sie, dass $f = \tilde{f}$ gilt und der Raum $(X, \|\cdot\|)$ vollständig ist.

Aufgabe 3 Seien V, W normierte Vektorräume und $A : V \to W$ linear und stetig. Die Operatornorm von A ist definiert durch (4 Punkte)

$$\|A\| := \sup\{\frac{\|Ax\|_W}{\|x\|_V} : 0 \neq x \in V\}.$$

Zeigen Sie, dass gilt: $\|A\| = \sup\{\|Ax\|_W : x \in V \text{ und } \|x\|_V = 1\}$.

Aufgabe 4 Sei $0 < a \in \mathbb{R}$ und $z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie: (3 Punkte)

$$(a)\ \overline{\exp z} = \exp \bar{z}, \quad (b)\ \overline{a^z} = a^{\bar{z}}, \quad (c)\ a^{xz} = (a^x)^z \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Aufgabe 5 Berechnen Sie die Integrale (7 Punkte)
(a) $\int_0^{\sqrt[3]{\pi}} t^2 \sin(t^3) dt$, (b) $\int t^2 \exp(t) dt$.
(c) Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten des uneigentlichen Integrals $\int_1^2 \frac{\exp(t)\sin(t)}{(2-t)^{\frac{4}{3}}} dt$.

Aufgabe 6 Seien V, W Banachräume, $G \subseteq V$ offen, $f : G \to W$ und $p \in G$. (2 Punkte)

(a) Sei f in p differenzierbar. Zeigen Sie, dass die Abbildung von V nach W definiert durch $v \mapsto \partial_v f(p)$ linear ist.

(b) Gilt allgemein für $v \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$: $\partial_{\lambda v} f(p) = \lambda \partial_v f(p)$?

Aufgabe 7 Sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $p = (1,0)$ und $\bar{x} = (x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$. Bestimmen Sie $\partial_{\bar{x}-p} f(p)$, $\partial^2_{\bar{x}-p} f(p)$ sowie das zweite Taylorpolynom von f an der Entwicklungsstelle p. (5 Punkte)

WS 2008/09
Prof. Dr. John M. Sullivan
Kerstin Günther

Technische Universität Berlin
Fakultät II
Institut für Mathematik

Lösungsskizze zur Nachklausur Analysis II

06.04.2009

Aufgabe 1

(a) M ist eine Metrik: seien $x, y, z \in M$. (2 P.)
Definitheit:

$$\begin{aligned}
&d(x,y) = 0 \\
&\Longrightarrow d_1(x,y) = 0 \text{ und } d_2(x,y) = 0 \text{ (da } d_1(x,y), d_2(x,y) \geq 0 \text{ und } a, b > 0) \\
&\Longrightarrow x = y \\
&x = y \Longrightarrow d_1(x,y) = 0 \text{ und } d_2(x,y) = 0 \Longrightarrow d(x,y) = 0
\end{aligned}$$

Symmetrie: klar, da d_1 und d_2 symmetrisch.
Dreiecksungleichung: da die Dreiecksungleichung für d_1 und d_2 gilt, folgt:

$$\begin{aligned}
d(x,y) + d(y,z) &= ad_1(x,y) + bd_2(x,y) + ad_1(y,z) + bd_2(y,z) \\
&\geq ad_1(x,z) + bd_2(x,z) = d(x,z).
\end{aligned}$$

(b) Wegen $\frac{1}{n} \to 0$ in $\mathbb{R}$ folgt: $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \to (0,0)$ in $\mathbb{R}^2$. Da $f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \to \frac{1}{2} \neq f(0,0)$, ist f nicht stetig. (Es gilt $f(x,x) = \frac{1}{2}$ für alle $0 \neq x \in \mathbb{R}$.) (1 P.)

(c) Es gilt (1 P.)

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \lim |c|^n = \begin{cases} +\infty & \text{für } |c| > 1, \\ 1 & \text{für } |c| = 1, \\ 0 & \text{für } |c| < 1. \end{cases}$$

Damit gilt (1 P.)

$$R = \begin{cases} 0 & \text{für } |c| > 1, \\ 1 & \text{für } |c| = 1, \\ +\infty & \text{für } |c| < 1. \end{cases}$$

(d) Nein, da die Stetigkeit von f und die Kompaktheit von $[2,3]$ impliziert, dass $f([2,3])$ kompakt ist. (1 P.)

(e) Die Normen sind nicht äquivalent, da kein $\lambda \geq 1$ existiert mit $\|x\|_1 \leq \lambda\|x\|_\infty$ für alle $x \in \ell^1$: (1 P.)
Angenommen es existiert $\lambda \geq 1$ mit $\|x\|_1 \leq \lambda\|x\|_\infty$ für alle $x \in \ell^1$. Betrachte $x = (1, 1, 1, \ldots, 1, 0, 0, \ldots) \in \ell^1$ mit mehr als λ Einträgen 1. Dann gilt $\|x\|_1 > \lambda$ und $\|x\|_\infty = 1$; insbes. ist $\|x\|_1 > \lambda\|x\|_\infty$. Dies ist ein Widerspruch. (2 P.)

Aufgabe 2

(a) Seien $f, g \in X$. (2 P.)
Es gilt $\|f\| \geq |f(x)|$ für alle $x \in [0,1]$. Somit gilt: $\|f\| = 0 \implies f = 0$.
Wenn $f = 0$, so folgt sofort $\|f\| = 0$.
Da $\|\cdot\|_\infty$ eine Norm auf $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ ist und $(\lambda f)' = \lambda f'$ gilt, folgt

$$\|\lambda f\| = |\lambda|\|f\|_\infty + |\lambda|\|f'\|_\infty = |\lambda|\|f\|.$$

Es gilt

$$\begin{aligned}\|f+g\| &\leq \|f+g\|_\infty + \|f'+g'\|_\infty \\ &\leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty + \|f'\|_\infty + \|g'\|_\infty = \|f\| + \|g\|.\end{aligned}$$

(b) Für $x \in [0,1]$ gilt (Hauptsatz der Differential- u. Integralrechnung) (2 P.)

$$\begin{aligned}&|f(x) - \tilde{f}(x)| \\ &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(0) + f_n(0) - f(0) - \int_0^x f^\star(t)dt| \\ &\leq \|f - f_n\|_\infty + |\int_0^x f_n'(t) - f^\star(t)dt| + |f_n(0) - f(0)| \\ &\leq 2\|f - f_n\|_\infty + \int_0^x |f_n'(t) - f^\star(t)|dt \leq 2\|f - f_n\|_\infty + \|f_n' - f^\star\|_\infty \to 0.\end{aligned}$$

Damit folgt $f(x) = \tilde{f}(x)$ für alle $x \in [0,1]$. Deshalb gilt $f = \tilde{f} \in X$. Wegen $f' = (\tilde{f})' = f^\star$, folgt (2 P.)

$$\begin{aligned}&\|f_n - f\| = \|f_n - f\|_\infty + \|(f_n - f)'\|_\infty = \|f_n - f\|_\infty + \|f_n' - f'\|_\infty \\ &= \|f_n - f\|_\infty + \|f_n' - f^\star\|_\infty \to 0.\end{aligned}$$

Somit ist X vollständig.

Aufgabe 3 Für $x_0 \in V$ mit $\|x_0\|_V = 1$ gilt: (2 P.)

$$\|A\| = \sup\{\frac{\|Ax\|_W}{\|x\|_V} : 0 \neq x \in V\} \geq \|Ax_0\|_W.$$

Da $x_0 \in V$ mit $\|x_0\|_V = 1$ beliebig war, folgt $\|A\| \geq \sup\{\|Ax\|_W : x \in V \text{ und } \|x\|_V = 1\}$.
Andererseits gilt für $0 \neq x_0 \in V$ (da A linear und $\|\frac{x_0}{\|x_0\|_V}\|_V = 1$) (2 P.)

$$\frac{\|Ax_0\|_W}{\|x_0\|_V} = \|A\frac{x_0}{\|x_0\|_V}\|_W \leq \sup\{\|Ax\|_W : x \in V \text{ und } \|x\|_V = 1\}.$$

Da $0 \neq x_0 \in V$ beliebig war, folgt die Behauptung.

Aufgabe 4

(a) Es gilt für $z = x + iy$ mit der Eulerschen Formel ($\cos y, \sin y \in \mathbb{R}$): (1 P.)

$$\begin{aligned}\overline{\exp z} &= \exp x\big(\overline{\cos y + i \sin y}\big) = \exp x\big(\cos y - i \sin y\big)\\ &= \exp x\big(\cos(-y) + i \sin(-y)\big) = \exp \bar{z}.\end{aligned}$$

(b) Es gilt mit (a): (1 P.)

$$\overline{a^z} = \overline{\exp(z \log a)} = \exp(\overline{z \log a}) = \exp(\overline{z} \log a) = a^{\overline{z}}.$$

(c) Es gilt $a^{xz} = \exp(xz \log a) = \exp(z \log(a^x)) = (a^x)^z$. (1 P.)

Aufgabe 5

(a) Mit der Substitutionsregel gilt ($s(t) = t^3$): (2 P.)

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt[3]{\pi}} t^2 \sin(t^3) dt &= \frac{1}{3} \int_0^{\sqrt[3]{\pi}} s'(t) \sin(s(t)) dt\\ &= \frac{1}{3} \int_{s(0)}^{s(\sqrt[3]{\pi})} \sin(t) dt = \frac{1}{3}\Big[-\cos(t)\Big]_0^{\pi} = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

(b) Mit partieller Integration gilt: (2 P.)

$$\begin{aligned}&\int t^2 \exp(t) dt\\ &= t^2 \exp(t) - 2 \int t \exp(t) dt = t^2 \exp(t) - 2\big[t \exp(t) - \int \exp(t) dt\big]\\ &= t^2 \exp(t) - 2t \exp(t) + 2 \exp(t).\end{aligned}$$

(c) Sei $k := \min_{1 \le t \le 2} \exp(t) \sin(t)$. Dieses existiert, da $t \mapsto \exp(t) \sin(t)$ auf $[1, 2]$ stetig ist. Weiterhin ist $k > 0$. Damit

$$\frac{\exp(t)\sin(t)}{(2-t)^{\frac{4}{3}}} \ge \frac{k}{(2-t)^{\frac{4}{3}}}, \quad t \in [1, 2].$$

Es gilt

$$\int_1^2 \frac{k}{(2-t)^{\frac{4}{3}}} dt = \lim_{a \to 2^-} 3k\big[(2-t)^{-\frac{1}{3}}\big]_1^a = \big(\lim_{a \to 2^-} 3k(2-a)^{-\frac{1}{3}}\big) - 3k = +\infty.$$

Folglich existiert $\int_1^2 \frac{\exp(t)\sin(t)}{(2-t)^{\frac{4}{3}}} dt$ nicht. (3 P.)

Aufgabe 6

(a) Da $D_p f$ linear ist und $\partial_v f(p) = D_p f(v)$ folgt die Behauptung. (1 P.)

(b) Es gilt (1 P.)

$$\partial_{\lambda v} f(p) = \lim_{t \to 0} \frac{f(p + t\lambda v) - f(p)}{t} = \lim_{s \to 0} \frac{f(p + sv) - f(p)}{\frac{s}{\lambda}} = \lambda \partial_v f(p).$$

Aufgabe 7 Sei $p = (1,0)$ und $\bar{x} = (x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$. Es gilt $\partial_{\bar{x}-p} f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ mit

(1 P.)

$$\tilde{x} \mapsto \partial_{\bar{x}-p} f(\tilde{x}) =< (x-1,y)^T, \Big(\partial_1 f(\tilde{x}), \partial_2 f(\tilde{x})\Big)^T >= (x-1)\partial_1 f(\tilde{x}) + y\partial_2 f(\tilde{x})$$

und (1 P.)

$$\partial^2_{\bar{x}-p} f(p) = \Big(\partial_{\bar{x}-p}\big(\partial_{\bar{x}-p} f\big)\Big)(p)$$

$$=< (x-1,y)^T, \Big((x-1)\partial_1\partial_1 f(p) + y\partial_1\partial_2 f(p), (x-1)\partial_2\partial_1 f(p) + y\partial_2\partial_2 f(p)\Big)^T > .$$

Wegen

$$\begin{aligned}
&\partial_1 f(p) = -1, \quad \partial_2 f(p) = 0 \\
&\partial_1\partial_1 f(p) = 2, \quad \partial_1\partial_2 f(p) = 0 = \partial_2\partial_1 f(p), \quad \partial_2\partial_2 f(p) = -1
\end{aligned}$$

folgt (2 P.)

$$\begin{aligned}
\partial_{\bar{x}-p} f(p) &= -x + 1, \\
\partial^2_{\bar{x}-p} f(p) &= 2(x-1)^2 - y^2.
\end{aligned}$$

Somit erhalten wir insgesamt $T_2(\bar{x}) = 1 + (-x+1) + \frac{1}{2}(2(x-1)^2 - y^2) = x^2 - 3x + 3 - \frac{y^2}{2}$.

(1 P.)