WS 2008/09
Prof. Dr. John M. Sullivan
Kerstin Günther

Technische Universität Berlin
Fakultät II
Institut für Mathematik

16. Übungsblatt Analysis II

Übungsaufgaben

1. Zeigen Sie, dass die Abbildung $P : (0, \infty) \times (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0\}$ definiert durch
$$(r, \varphi) \mapsto (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$$
ein Diffeomorphismus ist.

2. Beweisen Sie Lemma E8.2 aus der Vorlesung: Seien $U \subseteq \mathbb{R}^m$ und $V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und sei $f : U \to V$ ein Homöomorphismus mit der Umkehrabbildung $g : V \to U$. Sei $p \in U$ so, dass f in p differenzierbar ist und g in $q := f(p) \in V$ differenzierbar ist. Dann gelten $m = n$ und $D_q g = (D_p f)^{-1}$; insbesondere ist $D_p f$ invertierbar.

3. Untersuchen Sie die Gleichung $x^2(1 - x^2) - y^2 = 0$ auf Auflösbarkeit nach y in einer Umgebung um $(\bar{x}, \bar{y}) = (1, 0)$.

4. Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und konvex und $f : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Zeigen Sie: f ist streng konvex genau dann, wenn für alle $a \in U$ und für alle $x \in U$ mit $x \neq a$ gilt:
$$f(x) > f(a) + D_a f(x - a).$$

Tutoriumsaufgaben

1. Es sei
$$D := \left\{(x, y) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi) \in \mathbb{R}^2 : r > 0,\ 0 < \varphi < \frac{\pi}{4}\right\},$$
$$Q := \left\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u, v > 0\right\}.$$
Finden Sie einen Diffeomorphismus $f : D \to Q$.

2. An die durch
$$F(x, y) = \exp(y) \sin x + \exp(x) \cos y = 0$$
implizit definierte Kurve ist im Punkt $(0, \frac{\pi}{2})$ die Tangente zu legen. Wie lautet deren Gleichung?

3. $\mathbb{R}$ sei wie üblich durch den Betrag metrisiert. Seien $A := [0, 2] \subseteq \mathbb{R}$ und $T : A \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$T(x) = \frac{1}{3}(4 - x^2).$$

Untersuchen Sie, ob

   (a) die Inklusion $T(A) \subseteq A$ besteht,
   (b) die Abbildung T eine Kontraktion darstellt,
   (c) der Banachsche Fixpunktsatz anwendbar ist,
   (d) die Abbildung T in A Fixpunkte hat.

4. Beweisen Sie Satz E7.18 aus der Vorlesung, dass

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = 0, \qquad \operatorname{div}(\operatorname{rot} X) = 0.$$

Am 13.02.09 findet ab 18 Uhr im MA 844 ein Umtrunk der LV Analysis 3 statt, zu der die Teilnehmer des Analysis 2-Kurses ebenfalls eingeladen sind.