WS 2008/09
Prof. Dr. John M. Sullivan
Kerstin Günther

Technische Universität Berlin
Fakultät II
Institut für Mathematik

9. Übungsblatt Analysis II

Abgabe: 16.12.2008

Übungsaufgaben

1. Beweisen Sie: Sei $X \neq \varnothing$ und (f_ν) Folge in $B(X,\mathbb{R})$. Gilt $\sum_{\nu=0}^{\infty} \|f_\nu\|_\infty < +\infty$, dann konvergiert die unendliche Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu$ auf X gleichmäßig gegen eine Funktion $f \in B(X,\mathbb{R})$.

2. Zeigen Sie, daß zu jeder stetigen Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Folge von Polynomen (p_n) existiert, die auf $[a,b]$ gleichmäßig gegen f konvergiert.

3. Beweisen Sie: Jede zusammenhängende offene Menge X in einem normierten Vektorraum ist wegzusammenhängend.

4. Es seien V, W normierte Vektorräume. Beweisen Sie: Eine lineare Abbildung $A : V \to W$ ist genau dann stetig, wenn es eine Konstante C gibt so, dass $\|Ax\| \leq C\|x\|$ für alle $x \in V$ gilt. In diesem Fall ist A sogar eine Lipschitz-Abbildung.

5. Zeigen Sie, dass die Operatornorm tatsächlich eine Norm ist.

Tutoriumsaufgaben

1. Zeigen Sie folgende Aussagen:

   (a) Jede konvexe Menge X in einem normierten Vektorraum ist wegzusammenhängend.

   (b) Für $n \geq 2$ sind $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und die Sphäre $S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 = 1\}$ wegzusammenhängend ($\mathbb{R}^n$ ist mit der ℓ^2-Norm versehen).

   (c) Für $n \geq 2$ existiert keine bijektive stetige Abbildung mit stetiger Umkehrabbildung von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}$.

2. Es seien $n \geq 1$ und

   - $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ die Gruppe der reellen $n \times n$-Matrizen A mit $\det A \neq 0$,
   - $\mathrm{GL}^+(n,\mathbb{R})$ die Gruppe der reellen $n \times n$-Matrizen A mit $\det A > 0$.

Zeigen Sie: Die Gruppe $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ ist nicht zusammenhängend und die Unterguppe $\mathrm{GL}^+(n,\mathbb{R})$ ist zusammenhängend.

3. Es seien $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ jeweils mit der ℓ^1-Norm versehen. Zeigen Sie, dass die Operatornorm $\|\cdot\|_{L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)}$ auf $L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ durch die Spaltensummennorm $\|\cdot\|_S$ von $\mathbb{R}^{m\times n}$ dargestellt wird, d.h., es gilt

$$\|A\|_{L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)} = \|[A]\|_S \qquad \text{für alle } A \in L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m).$$

Hierbei bezeichnet $[A]$ die Darstellungsmatrix von A bezüglich der Standardbasen von $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$.

Hausaufgaben

9.1 Seien V, W normierte Vektorräume und $A : V \to W$ stetig und $\mathbb{R}$-linear. Zeigen Sie: (4 Punkte)

$$\|A\|_{L(V,W)} = \sup\left\{\frac{\|Ax\|_W}{\|x\|_V} : x \in V, x \neq 0\right\}.$$

9.2 Untersuchen Sie die Funktionenreihen (6 Punkte)

$$(a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}, \quad (b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right|, \quad (c)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x^2+n}, \quad (d)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{x^2+n}\right|$$

auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

9.3 Seien (X,d) ein metrischer Raum, $A \subseteq B \subseteq \bar{A} \subseteq X$ ($\bar{A}$ bezeichnet die Menge aller Berührungspunkte von A) und sei A zusammenhängend. Zeigen Sie, dass B zusammenhängend ist. (5 Punkte)
(Es folgt sofort: $\bar{A}$ ist auch zusammenhängend.)