TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
J. Behrndt, C. Kreusler

Wintersemester 2008/2009

Funktionalanalysis II

1. Übungsblatt

Abgabe in der Übung am 24. 10.

Aufgabe 1.
Es sei X ein Banachraum und $A : X \supset D(A) \to X$ ein abgeschlossener linearer Operator. Zeige, daß für $\lambda, \mu \in \rho(A)$ die *Resolventengleichung* gilt:

$$(A-\lambda)^{-1} - (A-\mu)^{-1} = (\lambda - \mu)(A-\lambda)^{-1}(A-\mu)^{-1}.$$

Aufgabe 2.
Es seien X, Y Banachräume und $A : X \supset D(A) \to Y$ ein linearer Operator. A heisst *abschliessbar*, wenn der Abschluss des Graphen von A, also

$$\overline{Gr(A)} \subset X \times Y,$$

der Graph eines linearen Operators ist.
Zeige, daß A genau dann abschliessbar ist, wenn für jede Folge $(u_n) \subset D(A)$ mit $u_n \to 0$ in X, für die Au_n in Y gegen ein $y \in Y$ konvergiert, gilt, daß $y = 0$ ist.
Gibt es nicht abschliessbare Operatoren?

Aufgabe 3.
Es seien X und Y Banachräume. Zeige, daß die Menge der stetigen, bijektiven Operatoren von X nach Y offen in $L(X, Y)$ ist.

Aufgabe 4.
Es sei $X = C([0,1])$, wie üblich versehen mit der Supremumsnorm, und $T : X \to X$ gegeben durch

$$(Tu)(t) := \int_0^t u(s)ds.$$

Zeige

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} \|T^n\|^{1/n} < \|T\|.$$

Was ist $\sigma(T)$?

Aufgabe 5.
Es seien X, Y Banachräume und $T : X \supset D(T) \to Y$ ein linearer Operator. Beweise oder widerlege die folgenden Aussagen:

(i) Ist T bijektiv, so ist T genau dann abgeschlossen, wenn T^{-1} abgeschlossen ist.

(ii) Sei $S \in L(X, Y)$. Dann ist T genau dann abgeschlossen, wenn $T+S$ abgeschlossen ist.

(iii) Sei $A : X \supset D(A) \to Y$ ein abgeschlossener, linearer Operator. Dann ist T genau dann abgeschlossen, wenn $T + A$ abgeschlossen ist.

(iv) Sei T abgeschlossen und sei $\lambda \in \rho(T)$. Dann ist die Resolvente $(T - \lambda)^{-1}$ abgeschlossen.

(v) Seien X und Y nun Hilberträume. Dann ist T genau dann abgeschlossen, wenn T schwach abgeschlossen ist, d.h. wenn für jede Folge $(u_n) \subset D(T)$ mit $u_n \rightharpoonup u$ in X und $Tu_n \rightharpoonup v$ in Y folgt, daß $u \in D(T)$ und $Tu = v$ ist.