Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
J. Behrndt, C. Kreusler

Wintersemester 2008/2009

Funktionalanalysis II

10. Übungsblatt

Abgabe in der Übung am 9. 1. 2009

Aufgabe 1.
Es sei $(H, (\cdot,\cdot))$ ein Hilbertraum. Zeige, daß

$$J := \begin{pmatrix} 0 & iI_H \\ -iI_H & 0 \end{pmatrix}$$

ein selbstadjungierter Operator im Hilbertraum $(H \times H, (\cdot,\cdot)_{H^2})$ ist, wobei

$$\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right)_{H^2} := (x, x') + (y, y'), \quad x, x', y, y' \in H,$$

gilt, und berechne $\sigma(J)$.

In $H \times H$ ist durch

$$\left[\!\left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right]\!\right] := \left(J \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right), \quad x, x', y, y' \in H$$

ein indefinites inneres Produkt gegeben. Einen linearen Unterraum $\Theta \subset H \times H$ nennen wir symmetrisch (bzw. selbstadjungiert), falls $\Theta \subset \Theta^{\perp_{[\cdot,\cdot]}}$ (bzw. $\Theta = \Theta^{\perp_{[\cdot,\cdot]}}$) gilt.

Es sei nun A ein symmetrischer (bzw. selbstadjungierter) Operator in H. Zeige, daß der Graph $G(A)$ ein symmetrischer (bzw. selbstadjungierter) Unterraum von $H \times H$ ist. Finde einen selbstadjungierten Teilraum in $H \times H$, der nicht Graph eines Operators ist.

Aufgabe 2.
Es seien A und B selbstadjungierte Operatoren in einem Hilbertraum H und es gelte

$$\dim \left(\operatorname{ran} \left((A - \mu)^{-1} - (B - \mu)^{-1} \right) \right) = n < \infty$$

für ein $\mu \in \rho(A) \cap \rho(B)$. Zeige, daß sich A und B nur auf einem n-dimensionalen Unterraum von H unterscheiden, daß es also einen Raum $D \subset H$ gibt, sodaß $A = B$ auf D und dom $(A)/D$ sowie dom $(B)/D$ n-dimensional sind.

Wir wünschen frohe Weihnachten und einen guten Rutsch in das neue Jahr!