Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
J. Behrndt, C. Kreusler

Wintersemester 2008/2009

Funktionalanalysis II

11. Übungsblatt

Abgabe in der Übung am 16. 1.

Aufgabe 1.
Beweise Lemma 5.5 aus der Vorlesung:
Sei $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(i) $f \in S(\mathbb{R}^n)$.

(ii) Für alle $\beta \in \mathbb{N}_0^n$ und $p \in \mathbb{N}_0$ gibt es eine Konstante $C_{\beta p f}$ mit

$$|x|^p |(D^\beta f)(x)| \leq C_{\beta p f}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

(iii) Für alle $\beta \in \mathbb{N}_0^n$ und $p \in \mathbb{N}_0$ gibt es eine Konstante $\widetilde{C}_{\beta p f}$ mit

$$(1+|x|^2)^{p/2} |(D^\beta f)(x)| \leq \widetilde{C}_{\beta p f}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

(iv) Für alle $\beta \in \mathbb{N}_0^n$ und $p, q \in \mathbb{N}_0$ gibt es eine Konstante $C_{\beta p q f}$ mit

$$(1+|x|^2)^{p/2} |(D^\beta f)(x)| \leq C_{\beta p q f} (1+|x|^2)^{-q/2}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Aufgabe 2.
Es sei $f \in S(\mathbb{R}^n)$ und $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}$. Berechne die Fouriertransformierten folgender Funktionen:

(i) $f_1(x) := f(x-a), \quad x \in \mathbb{R}^n$,

(ii) $f_2(x) := e^{ia\cdot x} f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n$,

(iii) $f_3(x) := f(bx), \quad x \in \mathbb{R}^n$,

Aufgabe 3.
Auf dem Schwarzraum $S(\mathbb{R}^n)$ betrachten wir die Halbnormen $p_{\alpha,\beta}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$, welche durch

$$p_{\alpha,\beta}(u) := \|x^\alpha D^\beta u\|_\infty, \quad u \in S(\mathbb{R}^n),$$

definiert sind. Beweise die folgenden Aussagen.

(i) Es sei $(\alpha_k, \beta_k)_k$ eine Aufzählung von $\mathbb{N}_0^n \times \mathbb{N}_0^n$. Durch

$$d(u,v) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{p_{\alpha_k,\beta_k}(u-v)}{1+p_{\alpha_k,\beta_k}(u-v)}, \quad u,v \in S(\mathbb{R}^n)$$

ist eine Metrik auf $S(\mathbb{R}^n)$ definiert.

(ii) Es sei (u_n) eine Folge in $S(\mathbb{R}^n)$ und $u \in S(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} d(u, u_n) = 0$ genau dann, wenn für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$

$$\lim_{n\to\infty} p_{\alpha,\beta}(u - u_n) = 0$$

gilt.

(iii) $(S(\mathbb{R}^n), d)$ ist vollständig.

Aufgabe 4.
Es sei $S(\mathbb{R}^n)$ wie in der vorigen Aufgabe durch d metrisiert. Ein Element ϕ des Raumes

$$S'(\mathbb{R}^n) = \{\phi : S(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C} \,|\, \phi \text{ ist linear und stetig } \}$$

heisst *temperierte Distribution.* Zeige folgende Aussagen.

(i) Ein lineares Funktional $\phi : S(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ ist genau dann in $S'(\mathbb{R}^n)$, falls

$$\lim_{n\to\infty} \langle \phi, u_k \rangle = 0, \quad \text{wann immer} \quad \lim_{n\to\infty} u_n = 0 \text{ in } S(\mathbb{R}^n).$$

(ii) Es sei $1 \leq p \leq \infty$. Für $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ definiert

$$T_f : S(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}, \quad \langle T_f, u \rangle := \int f(x)u(x)dx, \; u \in S(\mathbb{R}^n),$$

eine temperierte Distribution.

(iii) Die *Deltadistribution* wird definiert durch

$$\delta : S(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}, \quad \langle \delta, u \rangle := u(0).$$

Es gilt $\delta \in S'(\mathbb{R}^n)$, aber es gibt kein $p \in [1,\infty]$ und $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, so daß $\delta = T_f$ ist.

(iv) Die Fouriertransformation $\mathcal{F}$ auf $S'(\mathbb{R}^n)$ wird definiert durch

$$\langle \mathcal{F}\phi, u \rangle := \langle \phi, \mathcal{F}_0 u \rangle, \quad u \in S(\mathbb{R}^n),$$

wobei $\mathcal{F}_0$ die gewöhnliche Fouriertransformation von Schwartzfunktionen bezeichne. Dann bildet $\mathcal{F}$ den Raum $S'(\mathbb{R}^n)$ bijektiv auf sich ab.

(v) Ist $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, so ist

$$\mathcal{F} T_f = T_{\mathcal{F}_1 f}.$$