Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
J. Behrndt, C. Kreusler

Wintersemester 2008/2009

Funktionalanalysis II

12. Übungsblatt

Abgabe in der Übung am 23. 1.

Aufgabe 1.
Es seien k, m, n stetige Funktionen auf $\mathbb{R}$, deren Träger kompakt sind. Mit K, M, N bezeichnen wir die zugehörigen Multiplikationsoperatoren in $L^2(\mathbb{R})$. Beweise, daß der Operator

$$K\mathcal{F}_2^{-1}M\mathcal{F}_2N : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$$

wohldefiniert und kompakt ist.

Aufgabe 2.
Eine unendlich lange Schiene ist im Schotterbett elastisch gelagert und am Ort x mit einer spezifischen Last $w(x)$, $w \in S(\mathbb{R})$, belegt. Für die Durchbiegung $u = u(x)$ gilt bekanntlich

$$u^{(4)}(x) + a^4 u(x) = w(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

wobei $a \in \mathbb{R}$ eine Konstante ist. Zeige, daß für u die Integraldarstellung

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{(\mathcal{F}w)(t)}{t^4 + a^4} e^{ixt} dt$$

gilt.

Aufgabe 3.
Es sei (wie in der VL)

$$C_\infty(\mathbb{R}^n) := \{g \in C(\mathbb{R}^n) \mid \lim_{|x|\to\infty} g(x) = 0\}.$$

Dann ist (VL) $\mathcal{F}_1 : L^1(\mathbb{R}^n) \to C_\infty(\mathbb{R}^n)$ injektiv. Zeige folgende Aussagen:

(i) $C_\infty(\mathbb{R}^n)$ ist, versehen mit der Supremumsnorm, ein separabler Banachraum.

(ii) Das Bild von $\mathcal{F}_1$ ist dicht in $C_\infty(\mathbb{R}^n)$.

(iii) $\mathcal{F}_1$ ist genau dann surjektiv, wenn $\mathcal{F}_1$ stetig invertierbar ist.

(iv) $\mathcal{F}_1$ ist nicht stetig invertierbar (also nicht surjektiv).[1]

Aufgabe 4.
Es seien $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Zeige, daß $f * g \in C_\infty(\mathbb{R}^n)$ ist und $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_2 \|g\|_2$.

[1] Man kann folgende Folge untersuchen: $f_n(x) := \sum_{k=1}^n e^{ikx} h(x-k)$, wobei $h \in C_0^\infty(-1/2, 1/2)$ ist.