Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
J. Behrndt, C. Kreusler

Wintersemester 2008/2009

# Funktionalanalysis II

## 13. Übungsblatt

Abgabe in der Übung am 30. 1.

**Aufgabe 1.**
Zeige, daß in Satz 5.17.c aus der Vorlesung der Abschluss notwendig ist. [1]

**Aufgabe 2.**
Beweise die Heisenbergsche Unschärferelation:
Für alle $a, \hat{a} \in \mathbb{R}$ gilt

$$\left(\int (t-a)^2 |f(t)|^2 dt\right)^{1/2} \left(\int (\omega - \hat{a})^2 |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega\right)^{1/2} \geq \frac{1}{2}\|f\|_2^2.$$

**Aufgabe 3.**
Es sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} -\frac{1}{4\pi|x|}, & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

gegeben. Zeige, daß $T_f$, definiert durch $\langle T_f, u\rangle := \int f(x)u(x)dx$, $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$, eine wohldefinierte Distribution[2] ist und berechne $\Delta T_f$ im distributionellen Sinne.

**Aufgabe 4.**
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Ist $f \in C^\infty(\Omega)$ und $\phi \in \mathcal{D}'(\Omega)$, so setzen wir

$$\langle f\phi, u\rangle := \langle \phi, fu\rangle, \quad u \in \mathcal{D}(\Omega).$$

(i) Zeige, daß $f\phi$ eine Distribution ist.

(ii) Im Fall $n = 1$ gilt die Produktregel $(f\phi)' = f'\phi + f\phi'$.

(iii) Welche $f \in C^\infty(\Omega)$ erfüllen $f\delta' = 0$ bzw. $f\delta'' = 0$?

[1] Betrachte z.B. das Polynom $p(x, y) = (1 - xy)^2 + y^2$.
[2] Wer nicht in der Übung war und/oder vergessen hat, was eine Distribution ist, der möge bei mir vorbeikommen.