Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
J. Behrndt, C. Kreusler

Wintersemester 2008/2009

Funktionalanalysis II

14. Übungsblatt

(letztes Übungsblatt)

Abgabe in der Übung am 6. 2.

Aufgabe 1.
Sei $f \in W_2^s(\mathbb{R}^n)$ mit $s > n/2$. . Zeige, daß zu jedem $\delta > 0$ mit $\delta < \min\{1, s - n/2\}$ eine Konstante $c = c(f, \delta)$ existiert, so daß $|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|^\delta$ gilt. (f ist in diesem Fall also hölderstetig mit Exponent δ.)[1]

Aufgabe 2.
Für Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ sei für $h \in \mathbb{R}^n$

$$(\Delta_h f)(x) := f(x+h) - f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Weiterhin definieren wir rekursiv für $h \in \mathbb{R}^n$:

$$\Delta_h^1 := \Delta_h \quad \text{und} \quad \Delta_h^{m+1} f := \Delta_h^1(\Delta_h^m f).$$

Zeige folgende Behauptungen.

(i) Für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt

$$(\Delta_h^m f)(x) = \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} (-1)^{m-j} f(x + jh), \quad x, h \in \mathbb{R}^n.$$

(ii) Für alle $m \in \mathbb{N}$ und $\lambda > 0$ gilt

$$(\Delta_h^m (f(\lambda \cdot))(x) = (\Delta_{\lambda h}^m f)(\lambda x), \quad x, h \in \mathbb{R}^n.$$

(iii) Es gilt

$$2(\Delta_h f)(x) = (\Delta_{2h} f)(x) - (\Delta_h^2 f)(x), \quad x, h \in \mathbb{R}^n,$$

und allgemein für $m \in \mathbb{N}$:

$$2^m (\Delta_h^m f)(x) = (\Delta_{2h}^m f)(x) + \Delta_h^{m+1} \left(\sum_{l=0}^{m-1} a_{m,l} f(\cdot + lh) \right)(x), \quad x, h \in \mathbb{R}^n,$$

wobei die reellen Konstanten $a_{m,l}$ unabhängig von f sind.

[1] Hinweis: Zeige zunächst für $0 < \delta \leq 1$: $|e^{ixz} - e^{iyz}| \leq \min\{|z||x-y|, 2\} \leq 2^{1-\delta}|z|^\delta |x-y|^\delta$.

Aufgabe 3.
Aus der Übung wissen wir, daß für $s \geq 0$, $s = k + \sigma$, $k \in \mathbb{N}$, $0 < \sigma < 1$,

$$\|f\|_{\widetilde{W}_2^s} := \left(\|f\|_{W_2^k}^2 + \sum_{|\alpha|=k} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\|\Delta_h D^\alpha f\|_{L^2}^2}{|h|^{n+2\sigma}} dh \right)^{1/2}$$

eine auf $W_2^s(\mathbb{R}^n)$ zu $\|\cdot\|_{W_2^s}$ äquivalente Norm definiert. Zeige nun, daß für $m \in \mathbb{N}$ und $0 < s < m$ auch

$$\|f\| := \|f\|_{L^2} + \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\|\Delta_h^m f\|_{L^2}^2}{|h|^{2s+n}} dh \right)^{1/2}$$

eine auf $W_2^s(\mathbb{R}^n)$ zu $\|\cdot\|_{W_2^s}$ äquivalente Norm definiert.