Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
J. Behrndt, C. Kreusler

Wintersemester 2008/2009

Funktionalanalysis II

2. Übungsblatt

Abgabe in der Übung am 7. 11. zusammen mit dem 3. Übungsblatt.
Die Übung am 31. 10. fällt leider aus!

Aufgabe 1.
Es sei $(\alpha_n) \in l^\infty$ eine beschränkte Folge. Bestimme das Spektrum (Punkt-, kontinuierliches und Restspektrum) des Operators

$$A : l^2 \to l^2, \quad (x_n) \mapsto A(x_n) := (\alpha_n x_n).$$

Unter welchen Voraussetzungen an die Folge (α_n) ist A selbstadjungiert?

Aufgabe 2.
Es sei

$$D(T) := \{(x_n) \in l^2 \,|\, \text{nur endlich viele } x_n \text{ sind ungleich Null}\}$$

der Definitionsbereich des Operators

$$T : l^2 \supset D(T) \to l^2, \quad (x_n) \mapsto (nx_n).$$

Zeige, daß T weder stetig noch abgeschlossen ist. Ist T abschliessbar? Bestimme gegebenenfalls den Abschluss von T. Ist T symmetrisch, wesentlich selbstadjungiert oder selbstadjungiert?

Aufgabe 3.
Es seien X, Y, Z Hilberträume und $T_1 : X \supset D(T_1) \to Y$, $T_2 : X \supset D(T_2) \to Y$ sowie $T_3 : Y \supset D(T_3) \to Z$ dicht definierte lineare Operatoren. Beweise die folgenden Aussagen.

(i) Ist $T_1 + T_2$ ein dicht definierter Operator, so gilt $T_1^* + T_2^* \subset (T_1 + T_2)^*$.

(ii) Ist $T_2 \in L(X, Y)$, so gilt sogar $T_1^* + T_2^* = (T_1 + T_2)^*$.

(iii) Ist $T_3 T_1$ ein dicht definierter Operator, so gilt $T_1^* T_3^* \subset (T_3 T_1)^*$.

(iv) Ist $T_3 \in L(Y, Z)$, so gilt sogar $T_1^* T_3^* = (T_3 T_1)^*$.

Aufgabe 4.
Korrigierte Version!
Beweise eine der beiden folgenden Behauptungen:

(i) Es sei
$$D(T) := \{u \in L^2(0,1) \,|\, u \text{ absolutstetig und } u' \in L^2(0,1)\}$$
der Definitionsbereich des Operators
$$T : L^2(0,1) \supset D(T) \to L^2(0,1), \quad Tu := u'.$$
Zeige, daß $D(T^*) = \{u \in D(T) \,|\, u(0) = u(1) = 0\}$ gilt und $T^*u = -u'$ für $u \in D(T^*)$.

(ii) Es sei
$$D(\widetilde{T}) := \{u \in L^2(0,1) \,|\, u' \text{ existiert fast überall und } u' \in L^2(0,1)\}$$
der Definitionsbereich des Operators
$$\widetilde{T} : L^2(0,1) \supset D(\widetilde{T}) \to L^2(0,1), \quad \widetilde{T}u := u'.$$
Zeige, daß $D(\widetilde{T}^*) = \{0\}$ gilt.

Aufgabe 5.
Es sei H ein Hilbertraum und $A \in L(H)$ selbstadjungiert. Aus der Vorlesung wissen wir, daß für alle $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ die Abschätzung
$$\|(A-\lambda)^{-1}\| \leq \frac{1}{|\mathrm{Im}\ \lambda|}$$
gilt. Es seien nun $\lambda_{min} := \min \sigma(A)$ und $\lambda_{max} := \max \sigma(A)$. Zeige, daß für $\lambda < \lambda_{min}$ und $\lambda' > \lambda_{max}$
$$\|(A-\lambda)^{-1}\| = \frac{1}{|\lambda - \lambda_{min}|} \quad \text{und} \quad \|(A-\lambda')^{-1}\| = \frac{1}{|\lambda' - \lambda_{max}|}$$
gilt.