Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
J. Behrndt, C. Kreusler

Wintersemester 2008/2009

Funktionalanalysis II

3. Übungsblatt

Abgabe zusammen mit dem 2. Übungsblatt in der Übung am 7. 11.

Aufgabe 1.
Es sei A ein abgeschlossener Operator in einem Banachraum H mit

$$\overline{\mathrm{dom}\,(A)} = H, \quad \text{aber} \quad \mathrm{dom}\,(A) \neq H.$$

Zeige, daß A unbeschränkt ist.

Aufgabe 2.
Es sei A ein abgeschlossener symmetrischer Operator in einem Hilbetraum H mit

$$\mathrm{ran}(A - \lambda) = H \qquad \text{für ein } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Zeige, daß A selbstadjungiert ist.

Aufgabe 3.
Beweise die *erste Neumannsche Formel*:
Es sei A ein abgeschlossener, **symmetrischer** Operator in einem Hilbertraum H und es seien $\mathcal{N}_i := \ker(A^* - i)$ und $\mathcal{N}_{-i} = \ker(A^* + i)$. Dann gilt

$$\mathrm{dom}\,(A^*) = \mathrm{dom}\,(A) \dot{+} \mathcal{N}_i \dot{+} \mathcal{N}_{-i},$$

d.h. jedes Element $u \in \mathrm{dom}\,(A^*)$ hat eine eindeutige Darstellung

$$u = u_0 + u_+ + u_-, \quad u_0 \in \mathrm{dom}\,(A),\, u_\pm \in \mathcal{N}_{\pm i}.$$

Weiterhin gilt

$$A^*(u_0 + u_+ + u_-) = Au_0 + iu_+ - iu_-, \quad u_0 \in \mathrm{dom}\,(A),\, u_\pm \in \mathcal{N}_{\pm i}.$$