Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
J. Behrndt, C. Kreusler

Wintersemester 2008/2009

Funktionalanalysis II

4. Übungsblatt

Abgabe in der Übung am 14. 11.

Aufgabe 1.
Es sei U ein unitärer Operator in einem Hilbertraum H. Zeige $\sigma_r(U) = \emptyset$.

Aufgabe 2.
Es sei A ein abgeschlossener Operator in einem Hilbertraum H mit $i \notin \sigma_p(A)$. Zeige, daß die Cayleytransformierte $C(A)$ ebenfalls abgeschlossen ist.

Aufgabe 3.
Es seien E_1 und E_2 Orthogonalprojektionen in einem Hilbertraum H, d.h. es gilt $E_i^2 = E_i$ und $\operatorname{ran}(E_i) \perp \ker(E_i)$, $i = 1, 2$. (Es sei daran erinnert, daß in diesem Fall auch $E_i^* = E_i$, $i = 1, 2$ gilt.) Zeige, daß die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(i) $\operatorname{ran}(E_1) \subset \operatorname{ran}(E_2)$,

(ii) $\ker(E_2) \subset \ker(E_1)$,

(iii) $E_1 E_2 = E_2 E_1 = E_1$,

(iv) $E_2 - E_1 \geq 0$.

Aufgabe 4.
Es sei A ein symmetrischer Operator in einem Hilbertraum H. Zeige, daß die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(i) A ist wesentlich selbstadjungiert,

(ii) $\ker(A^* + i) = \ker(A^* - i) = \{0\}$,

(iii) $\operatorname{ran}(A + i)$ und $\operatorname{ran}(A - i)$ sind dicht in H,

(iv) Es existieren $\lambda_1 \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Im}\lambda_1 > 0$ und $\lambda_2 \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Im}\lambda_2 < 0$, so daß

$$\overline{\operatorname{ran}(A - \lambda_1)} = \overline{\operatorname{ran}(A - \lambda_2)} = H$$

gilt.

Aufgabe 5.
Es sei A ein symmetrischer Operator in einem Hilbertraum H. Zeige:

(i) Ist B ein Operator in H, so daß $B \subset A$ und $\operatorname{ran}(A+i) = \operatorname{ran}(B+i)$ gilt, so folgt $A = B$.

(ii) Es gelte $\operatorname{ran}(A+i) = H$ und $\operatorname{ran}(A-i) \neq H$. Dann kann A keine selbstadjungierten Erweiterungen besitzen.