Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
J. Behrndt, C. Kreusler

Wintersemester 2008/2009

Funktionalanalysis II

5. Übungsblatt

Abgabe in der Übung am 21. 11.

Aufgabe 1.
Es sei U ein unitärer Operator in einem Hilbertraum H und $f \in C(\sigma(U))$. Beweise: Ist $f \neq 0$ auf $\sigma(U)$, so ist $(1/f)(U)$ wohldefiniert, $f(U)$ bijektiv und

$$\frac{1}{f}(U) = f(U)^{-1}.$$

Aufgabe 2.
Es sei U ein unitärer Operator in einem Hilbertraum H und $x, y \in H$. Wie in der Vorlesung sei $l_{x,y}$ das durch

$$l_{x,y}(f) := (f(U)x, y), \quad f \in C(\sigma(U))$$

auf $C(\sigma(U))$ definierte stetige, lineare Funktional. Zeige, daß die Zuordnung

$$H \times H \ni (x, y) \mapsto l_{x,y} \in C(\sigma(U))'$$

sesquilinear und stetig ist.

Aufgabe 3.
Es sei U ein unitärer Operator in einem Hilbertraum H und $\hat{\Phi} : B(\sigma(U)) \to L(H)$ der messbare Funktionalkalkül von U. Für eine Borelmenge $\mathcal{B} \subset \sigma(U)$ sei

$$E(\mathcal{B}) := \hat{\Phi}(\mathbb{1}_{\mathcal{B}}).$$

Zeige, daß $E(\mathcal{B})$ eine Orthogonalprojektion ist, die mit U vertauscht. Zeige weiterhin, daß $U|\mathrm{ran}(E(\mathcal{B}))$ ein unitärer Operator im Hilbertraum $\mathrm{ran}(E(\mathcal{B}))$ ist, so daß $\sigma(U|\mathrm{ran}(E(\mathcal{B}))) \subset \overline{\mathcal{B}}$ gilt. Folgere, daß für eine in $\sigma(U)$ offene Borelmenge $\mathcal{C} \neq \emptyset$ stets $E(\mathcal{C}) \neq 0$ gilt.

Aufgabe 4.
Es sei U ein unitärer Operator in einem Hilbertraum H und $f \in B(\sigma(U))$. Zeige, daß $f(U)$ mit jedem beschränkten Operator S vertauscht, der mit U vertauscht.

Aufgabe 5.
Es sei $U : L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$ erklärt durch

$$(Uf)(x) := e^{ix} f(x), \quad x \in [0,1], f \in L^2([0,1]).$$

Zeige, daß U unitär ist und berechne das Spektrum von U.
Sei $g \in B(\sigma(U))$. Beweise unter Verwendung der Eindeutigkeit des messbaren Funktionalkalküls, daß dann für $x \in [0,1]$ und $f \in L^2([0,1])$

$$(g(U)f)(x) = g(e^{ix})f(x)$$

gilt.
Ist der messbare Funktionalkalkül isometrisch?
Zeige mithilfe des Operators U, daß i.A. die Beziehung

$$f(\sigma(U)) = \sigma(f(U))$$

nicht gilt.