Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
J. Behrndt, C. Kreusler

Wintersemester 2008/2009

Funktionalanalysis II

6. Übungsblatt

Abgabe in der Übung am 28. 11.

Aufgabe 1.
Es sei H ein Hilbertraum, Σ eine σ-Algebra über einer Menge Ω und $E : \Sigma \to L(H)$ ein Spektralmaß, also

(a) Für jede Menge $A \in \Sigma$ ist $E_A := E(A)$ eine Orthogonalprojektion,

(b) $E_\emptyset = 0$ und $E_\Omega = Id$,

(c) für paarweise disjunkte $A_1, A_2, \dots \in \Sigma$ gilt

$$\sum_{i=1}^{\infty} E_{A_i} x = E_{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} x, \quad x \in H.$$

Zeige, daß für $A, B \in \Sigma$ folgende Aussagen gelten:

(i) Sind A und B disjunkt, so ist $E_A E_B = 0$.

(ii) Es gilt $E_A E_B = E_B E_A = E_{A \cap B}$.

(iii) Falls $A \supset B$, so ist $E_A \leq E_B$.

Aufgabe 2.
Zeige, daß der meßbare Funktionalkalkül eines unitären Operators involutiv ist.

Aufgabe 3.
Es sei A ein selbstadjungierter Operator im Hilbertraum $\mathbb{C}^n$ mit den paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, $m \leq n$, und es seien P_{λ_k} die Orthogonalprojektionen auf die zugehörigen Eigenräume. Für eine Borelmenge $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}$ setze

$$E(\mathcal{B}) := \sum_{\lambda_j \in \mathcal{B}} P_{\lambda_j}.$$

Zeige, daß E ein Spektralmaß ist und daß

$$A = \int \lambda dE = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j P_{\lambda_j}$$

gilt. Finde Polynome p und q, so daß $p(A) = 0$ und $q(A) = \arctan(e^A)$ gilt.

Aufgabe 4.

(i) Es sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine messbare Funktion und es bezeichne μ das Lebesguemaß. Der *wesentliche Defintionsbereich* von g ist definiert als

$$\text{essrange } g := \left\{ \lambda \in \mathbb{R} \,|\, \text{Für alle } \epsilon > 0 \text{ ist } \mu(\{g^{-1}((\lambda - \epsilon, \lambda + \epsilon))\}) > 0 \right\}.$$

Zeige, daß essrange g abgeschlossen ist und daß

$$\mu\left(\{g^{-1}(\mathbb{R} \backslash \text{essrange } g)\}\right) = 0$$

gilt.

(ii) Es sei nun $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ messbar und beschränkt und es bezeichne $\mathcal{B}$ die Borel-σ-Algebra auf $\mathbb{R}$. Für $A \in \mathcal{B}$ sei $\Omega_A := g^{-1}(A \cap \text{essrange } g)$ und $E : \mathcal{B} \to L(L^2([a, b]))$ definiert durch

$$E(A)f := \mathbb{1}_{\Omega_A} f, \qquad A \in \mathcal{B}, f \in L^2([a, b]).$$

Zeige, daß E ein Spektralmaß ist und berechne

$$\int \lambda dE_\lambda.$$