Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
J. Behrndt, C. Kreusler

Wintersemester 2008/2009

Funktionalanalysis II

7. Übungsblatt

Abgabe in der Übung am 5. 12.

Aufgabe 1.
Es sei H ein Hilbertraum und $E : \Sigma(\mathbb{R}) \to L(H)$ ein Spektralmaß und $f \in B(\mathbb{R})$. Zeige, daß für alle $x, y \in H$

$$\left(\int f(\lambda) dE_\lambda x\,,\, y\right) = \int f(\lambda) d(E_\lambda x, y)$$

gilt.

Aufgabe 2.
Sei U ein unitärer Operator in einem Hilbertraum H und $f : \sigma(U) \to \mathbb{C}$ eine i.a. unbeschränkte, messbare Funktion. Zeige, daß

$$\mathcal{D} := \{x \in H \mid \int |f(\lambda)|^2 \, d(E_\lambda x, x) < \infty\}$$

ein linearer Unterraum von H ist. (Siehe hierzu etwa Proposition 2.19 aus der Vorlesung)

Aufgabe 3.
Sei $A : H \supset D(A) \to A$ ein selbstadjungierter Operator, dessen Spektrum nur aus isolierten Eigenwerten endlicher Vielfachheit besteht (Vgl. Übung). Sei $\lambda \in \rho(A)$. Zeige, daß die Resolvente $(A - \lambda)^{-1}$ ein kompakter Operator ist.

Aufgabe 4.
Sei $A : H \supset D(A) \to A$ ein selbstadjungierter Operator. Zeige, daß nichtnegative selbstadjungierte Operatoren A_+ und A_- mit den folgenden Eigenschaften existieren.

(i) $A = A_+ - A_-$,

(ii) $A_+ A_- = A_- A_+$,

(iii) Ist A kompakt, so sind auch A_+ und A_- kompakt.

Aufgabe 5.
Sei H ein Hilbertraum. Eine Familie $(U(t))_{t\in\mathbb{R}}$ unitärer Operatoren auf H heißt *unitäre Gruppe*, falls

$$U(0) = I \quad \text{und} \quad U(s)U(t) = U(s+t) \quad \text{für alle } s, t \in \mathbb{R}.$$

Eine unitäre Gruppe $(U(t))_{t\in\mathbb{R}}$ heißt *stark stetig*, wenn für jedes $x \in H$ die Funktion $t \mapsto U(t)x$ stetig ist. Den auf

$$D(A) := \{x \in H \mid \lim_{t\to 0} \frac{(U(t) - I)x}{t} \text{ existiert } \}$$

durch

$$Ax := \lim_{t\to 0} \frac{(U(t) - I)x}{t}, \quad x \in D(A),$$

definierten Operator nennen wir den *infinitesimalen Erzeuger* von $(U(t))_{t\in\mathbb{R}}$.

Sei nun $A : H \supset D(A) \to H$ ein selbstadjungierter Operator in H mit Spektralmaß E. Zeige, daß durch

$$U(t) := e^{iAt} = \int e^{ist} dE_s, \quad t \in \mathbb{R}$$

eine stark stetige unitäre Gruppe definiert wird, die iA als infinitesimalen Erzeuger hat.

<u>Zusatz</u>: Sei nun umgekehrt $(U(t))_{t\in\mathbb{R})}$ eine stark stetige unitäre Gruppe in $L(H)$ und A der infinitesimale Erzeuger von $(U(t))_{t\in\mathbb{R}}$. Zeige, daß

$$D_0 := \{f_\phi := \int \phi(s)U(s)f ds \mid f \in H,\, \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}\}$$

in $D(A)$ enthalten ist und dicht ist in H. Weiterhin zeige, daß der Abschluss $\overline{T}$ des Operators $T := -iA$ selbstadjungiert ist und für alle $t \in \mathbb{R}$

$$U(t) = e^{it\overline{T}}$$

gilt.