Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
J. Behrndt, C. Kreusler

Wintersemester 2008/2009

Funktionalanalysis II

8. Übungsblatt

Abgabe in der Übung am 12. 12.

Aufgabe 1.
Es sei A ein (nicht notwendigerweise beschränkter) selbstadjungierter Operator in einem Hilbertraum H und E sein Spektralmaß. Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ sei

$$E_\lambda := E((-\infty, \lambda] \cap \sigma(A))$$

Die Funktion $\mathbb{R} \ni \lambda \mapsto E_\lambda$ heißt *Spektralschar*[1] von A. Beweise folgende Eigenschaften.

(i) Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ ist E_λ eine Orthogonalprojektion.

(ii) Für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mit $\lambda < \mu$ gilt $E_\lambda E_\mu = E_\mu E_\lambda = E_\lambda$.

(iii) Für alle $x \in H$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ ist $\lim_{\epsilon \to 0+} E_{\lambda+\epsilon} x = E_\lambda x$.

(iv) Für alle $x \in H$ ist $\lambda \mapsto (E_\lambda x, x)$ monoton und $0 \leq (E_\lambda x, x) \leq \|x\|^2$.

(v) Ist A beschränkt, so gibt es $m, M \in \mathbb{R}$ mit

$$E_\lambda = 0 \text{ für } \lambda < m \quad \text{und} \quad E_\lambda = I \text{ für } \lambda > M.$$

(vi) Die Funktion $\lambda \mapsto E_\lambda$ ist in einer Umgebung von $\mu \in \mathbb{R}$ genau dann konstant, wenn $\mu \in \rho(A)$ gilt.

(vii) Die Funktion $\lambda \mapsto E_\lambda$ ist bei $\mu \in \mathbb{R}$ genau dann unstetig, wenn $\mu \in \sigma_p(A)$ gilt.

(viii) Die Funktion $\lambda \mapsto E_\lambda$ ist bei $\mu \in \mathbb{R}$ genau dann stetig, aber nicht konstant, wenn $\mu \in \sigma_c(A)$ gilt.

(ix) A hat höchstens abzählbar viele Eigenwerte.

Aufgabe 2.
Sei A ein selbstadjungierter Operator in einem Hilbertraum H und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beschränkt und meßbar. Zeige, daß

$$\|f(A)\| = \| \int f(t) dE_t^A \| \leq \|f\|_\infty$$

gilt.

[1] Vergleiche mit der Verteilungsfunktion eines reellen Maßes drängen sich auf.

Aufgabe 3.
Es seien A und B lineare Operatoren in einem Hilbertraum H. Zeige, daß B genau dann A-beschränkt ist, wenn $D(A) \subset D(B)$ gilt und es $\tilde{a}, \tilde{b} > 0$ gibt mit

$$\|Bx\|^2 \leq \tilde{a}^2\|x\|^2 + \tilde{b}^2\|Ax\|^2, \quad x \in D(A).$$

In diesem Fall ist das Infimum über alle möglichen $\tilde{b}$ gleich der A-Schranke von B.

Aufgabe 4.
Beweise den Spektralsatz für beschränkte, normale Operatoren:
Sei $T \in L(H)$ ein beschränkter, normaler[2] Operator in einem Hilbertraum H. Dann gibt es ein Spektralmaß E mit kompaktem Träger auf der Borel-σ-Algebra von $\mathbb{C}$ mit

$$T = \int_{\sigma(T)} \mathfrak{z} dE.$$

(Wieder sei $\mathfrak{z} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\mathfrak{z}(z) = z$.)
Bemerkungen:

(a) Der meßbare Funktionalkalkül von T kann dann durch

$$f(T) := \int f(z) dE_z$$

definiert werden.

(b) Der Spektralsatz kann auch für unbeschränkte normale Operatoren formuliert werden, jedoch muss in diesem Fall wieder besonderes Augenmerk auf die jeweiligen Definitionsbereiche gelegt werden.

(c) Hinweis: Betrachte die Operatoren

$$S_1 := \frac{1}{2}(T + T^*) \text{ und } S_2 := \frac{1}{2i}(T - T^*).$$

[2] Also $TT^* = T^*T$.