TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
J. Behrndt, C. Kreusler

Wintersemester 2008/2009

Funktionalanalysis II

9. Übungsblatt

Abgabe in der Übung am 19. 12.

Aufgabe 1.
Sei S ein abgeschlossener, symmetrischer, aber nicht selbstadjungierter Operator und

$$T := (S^*S)^{1/2}.$$

Sei weiterhin $\lambda \in \mathbb{R}$. Zeige die folgenden Behauptungen.

(i) $T + \lambda S$ ist selbstadjungiert, falls $|\lambda| < 1$ ist.

(ii) $T + \lambda S$ ist wesentlich selbstadjungiert, falls $|\lambda| = 1$ ist.

(iii) $T + \lambda S$ ist symmetrisch, und abgeschlossen, aber nicht selbstadjungiert, falls $|\lambda| > 1$ ist.

Aufgabe 2.
Es seien X, Y und Z Banachräume und $T : X \supset D(T) \to Y$ und $S : X \supset D(S) \to Y$ lineare Operatoren.

(i) Es sei $D(T) \subset D(S)$, T abgeschlossen und S abschliessbar[1] Zeige, daß S T-beschränkt ist.

(ii) Sei nun S T-beschränkt mit Schranke < 1. Zeige, daß $T + S$ genau dann abgeschlossen ist, wenn T abgeschlossen ist (d.h. "kleine" Störungen erhalten die Abgeschlossenheit.)

Aufgabe 3.
Sei T selbstadjunigert, V symmetrisch und $D(T) \subset D(V)$. Es sei für alle $\mu \in [0, 1]$ der Operator $T + \mu V$ abgeschlossen. Zeige, daß dann $T + V$ selbstadjungiert ist.

Aufgabe 4.
Es seien X und Z Banachräume, $A : X \supset D(A) \to Z$ und $V : X \supset D(V) \to Z$ lineare Operatoren mit $D(A) \subset D(V)$. Dann heißt V A-kompakt, falls jede Folge $(x_n) \subset D(A)$, für die $(\|x_n\| + \|Ax_n\|)$ beschränkt ist, eine Teilfolge (x_{n_k}) enthält, für die (Vx_{n_k}) konvergiert.

[1] D.h. $\overline{S}$ ist ein Operator, vgl. 1. Aufgabenblatt.

(i) Es sei V A-kompakt und abschließbar. Zeige, daß V A-beschränkt ist mit Schranke 0.

(ii) Es sei nun A selbstadjungiert, V symmetrisch und A-kompakt. Zeige, daß dann $A + V$ selbstadjungiert ist und das wesentliche Spektrum von A und $A + V$ übereinstimmt. Weiterhin haben A und $A+V$ sogar dieselben singulären Folgen.