Aufg 9.1.

Sei $V = \{ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid$ nur für endlich viele $x \in \mathbb{R}$ gilt $f(x) \neq 0 \}$

mit den punktweisen Verknüpfungen

$$+ : V \times V \to V$$
$$(f, g) \longmapsto f+g \quad \text{mit } (f+g)(x) = f(x) + g(x) \ \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$$
$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, f \in V.\ (\lambda, f) \longmapsto \lambda \cdot f \quad \text{mit } (\lambda f)(x) = \lambda \cdot f(x).\ \forall x \in \mathbb{R}$$

Zu zeigen: $(V, +, \cdot)$ ist ein Vektorraum.

Beweis Aus der Vorlesung ist folgendes bekannt:

1) Die Menge der Abbildungen $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \{ f \mid f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ Abb.} \}$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum

2) Sei W ein Vektorraum und U ein Untervektorraum, dann ist U auch selbst ein Vektorraum.

Wir beweisen also folgendes: V ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Da nach 1) $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ein Vektorraum ist und 2) jeder Untervektorraum ein Vektorraum ist, wäre damit gezeigt, dass V ein Vektorraum ist.

Definiere zu jeder Abbildung $f \in V$ die Menge der Stellen $x \in \mathbb{R}$ für die $f(x) \neq 0$ ist:

$$X_f := \{ x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0 \} \subseteq \mathbb{R}.$$

Diese Menge ist endlich für alle $f \in V$ nach Definition der Menge V.

Um zu zeigen, dass V ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ist muss folgendes gelten:

i) V muss eine Teilmenge von $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ sein, $V \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

ii) V darf nicht leer sein: $V \neq \emptyset$

iii) Für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und Abbildungen $f, g \in V$ muss die Linearkombination $\lambda f + \mu g \in V$ sein.

zu i) V ist eine Menge von Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$, also gilt $V \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

zu ii) Die Nullabbildung $f_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_0(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ hat keine Stellen für die f_0 ungleich 0 ist, also liegt $f_0 \in V$.

zu iii) Seien $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und $f, g \in V$. Zu zeigen ist $\lambda f + \mu g \in V$, d.h. die Menge der Stellen $x \in \mathbb{R}$ für die $(\lambda f + \mu g)(x) \neq 0$ ist, ist endlich.

(*)

Also ist zu zeigen, dass $X_{\lambda f + \mu g}$ endlich ist. Es gilt $X_f \supseteq X_{\lambda f}$ und $X_g \supseteq X_{\mu g}$, da für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = 0$ auch $(\lambda f)(x) = \lambda f(x) = 0$ ist. Genauso ist für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $g(x) = 0$ auch $(\mu g)(x) = \mu \cdot g(x) = 0$. Ausserdem ist für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = 0$ und $g(x) = 0$ auch $(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda f(x) + \mu g(x) = 0$. Daraus folgt, dass

$$X_{\lambda f + \mu g} \subseteq X_{\lambda f} \cup X_{\mu g} \subseteq X_f \cup X_g .$$

Da X_f und X_g endlich sind, ist auch $X_{\lambda f + \mu g}$ endlich, also auch $\lambda f + \mu g \in V$.