Kapitel 1 Grundlagen

1. Aussagen und Quantoren

Aussagen

Die Aussagenlogik handelt von mathematischen Aussagen, die nach gewissen Regeln aus gewissen Symbolen gebildet werden. Eine Aussage, die wohlgeformt ist, ist entweder wahr oder falsch (Wahrheitswert).

Beispiel 1.1 •"$0 \in \mathbb{Z}$" bzw. "Null ist eine ganze Zahl" –> wahr
•"2+2=5" –> falsch
•"a+a=2a gilt für beliebige nat. Zahlen a" –> wahr

Bemerkung 1.2 Der Wahrheitsgehalt hängt von Axiomen ab.

Aus Aussagen A und B lassen sich weitere Aussagen bilden:
•"$\neg A$" $\rightarrow$Negation von A, ist genau dann wahr wenn A falsch ist.
•"A&B" bzw. "$A \wedge B$" ist genau dann wahr, wenn sowohl A als auch B wahr ist $\rightarrow$ Konjunktion
•"$A \vee B$"(A oder B) ist genau dann wahr, wenn entweder A, B oder beide wahr sind $\rightarrow$ Disjuktion
•"$A \Rightarrow B$" ist wahr, wenn "$(\neg A) \vee B$" wahr ist $\rightarrow$ Subjunktion/Implikation
•"$A \iff B$" ist definiert als "$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$" $\rightarrow$ Äquivalenz

Wahrheitstafeln

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \iff B$
w	w	f	w	w	w	w
w	f	f	f	w	f	f
f	w	w	f	w	w	f
f	f	w	f	f	w	w

Durch inspektion der Wahrheitstafeln(aller mögl. Belegungen) lassen sich Tantologien beweisen:
(1) $A \vee \neg A$ "tertium non datur"

(2) $\neg(A \vee B) \iff [(\neg A) \wedge (\neg B)]$

$\neg(A \wedge B) \iff [(\neg A) \vee (\neg B)]$

(De Morgansche Regeln)

Zusätzlich gelten die "Regeln des logischen Schließens"

(3) $A \wedge (A \Rightarrow B) \Rightarrow B$ direkter Schluss

(4) $\neg B \wedge (A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg A)$ indirekter Schluss

<u>Beweis:</u>

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg B \wedge (A \Rightarrow B)$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg B \wedge (A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg A)$
w	w	w	f	f	f	w
w	f	f	f	f	w	w
f	w	w	f	w	f	w
f	f	w	w	w	w	w

(5) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ Kontraposition

(6) Es gilt: $[A \Rightarrow (B \vee C)] \iff [(A \wedge \neg B) \Rightarrow C]$

<u>Beweis:</u> $[A \Rightarrow (B \vee C)] \underset{\text{Def. } \Rightarrow}{\iff} [(\neg A) \vee (B \vee C)]$

$\underset{\text{Assoziativ. von } \vee}{\iff} [((\neg A) \vee B) \vee C] \underset{\text{Def. } \Rightarrow}{\iff} [\neg((\neg A) \vee B) \Rightarrow C]$

$\underset{\text{De Morgan}}{\iff} [(A \wedge \neg B) \Rightarrow C]$

Beispiel 1.3 Die folgende Aussagen gilt z.B. über $\mathbb{Q}$:

$\underbrace{\lambda\mu = 0}_{A} \underset{\Rightarrow}{\Rightarrow} (\underbrace{\lambda = 0}_{B} \underset{\vee}{\vee} \underbrace{\mu = 0}_{C})$

Damit gilt automatisch:

$(\lambda\mu = 0 \wedge \lambda \neq 0) \Rightarrow \mu = 0$

Quantoren

Sei I eine Menge und $(A_i)_{i \in I}$ eine Familie von Aussagen:

$\forall i \in I : A_i$ ist genau dann wahr, wenn A_i für alle $i \in I$ wahr ist.
↑Allquantor

↓Existenzquantor
$\exists i \in I : A_i$ ist eine Aussagen, die wahr ist, genau dann wenn mindestens eine Aussage A_i wahr ist.

$\exists!\, i \in I : A_i$ A_i ist nur für <u>genau ein</u> i wahr

2. Mengenlehre

Definition 2.1

(1) Eine Menge ist eine Zusammenstellung von bestimmten, wohlunterscheidbaren Objekten zu einem neuen Objekt(-> Objekte der Menge = Elemente)

(2) <u>Extensionalität:</u> $(A = B) :\iff [\forall x : x \in A \iff x \in B]$

(3) <u>leere Menge:</u> $\varnothing := \{x \mid x \neq x\}$

(4) $A \subseteq B :\iff [\forall x : x \in A \Rightarrow x \in B]$

(5) $A \subsetneqq B :\iff [(A \subseteq B) \wedge A \neq B]$

(6) "$\mathcal{P}$"$(A) := \{X \mid X \subseteq A\}$ Potenzmenge

Definition 2.3

(1) $A \setminus B := \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$

(2) $A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$

(3) $A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$

Es gilt für beliebige Mengen A,B:

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ A \cap B = B \cap A \\ (2)\ A \cup B = B \cup A\end{array}\right\rangle \text{Kommutativgesetze}$$

$$\left.\begin{array}{l}(3)\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ (4)\ A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)\end{array}\right\rangle \text{Distributivgesetze}$$

$$\left.\begin{array}{l}(5)\ A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \\ (6)\ A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C\end{array}\right\rangle \text{Assoziativgesetze}$$

3. Relationen und Funktionen

Definition 3.1

(Geordnetes Paar) $(x, y) := \{\{x, y\}, \{x\}\}$

$(x, y) = (x', y')$ genau dann wenn $[x = x' \wedge y = y']$

Definition 3.2

Kartesisches Produkt:

Seien X und Y Mengen. Das Kartesische Produkt $X \times Y$ ist definiert durch: $X \times Y := \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$

Definition 3.3 Eine Relation R ist eine Teilmenge des Kartesischen Produkts $R \subseteq X \times Y$ für zwei Mengen X, Y.

$x \in X$ ist in Relation zu $y \in Y$: xRy

Definition 3.4 Sei R eine Relation auf X (bzw. $R \subseteq X \times X$)
Dann heißt R:
•reflexiv, wenn jedes Element mit sich selbst in Relation steht xRx
•symmetrisch, wenn für $x, y \in X$ mit xRy folgt: yRx
•antisymmetrisch, wenn für $x, y \in X$ aus xRy und yRx folgt $x = y$
•transitiv, wenn für $x, y, z \in X$ aus xRy und yRz folgt xRz

Definition 3.5 Eine reflexive, transitive und symmetrische Relation heißt Äquivalenzrelation.
Eine relexive, transitive und antisymmetrische Relation heißt Ordnungsrelation.

Definition 3.6 Sei M eine Menge, $[A_i]_{i\in I} \subset \mathcal{P}(M)$ eine Menge von Teilmengen. Dann ist $[A_i]_{i\in I}$ eine Partition falls:
(1) $A_i \neq \varnothing$ für alle $i \in I$
(2) $\bigcup\limits_{i\in I} A_i = M$ Überdeckung
(3) $\forall i, j \in I : i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \varnothing$

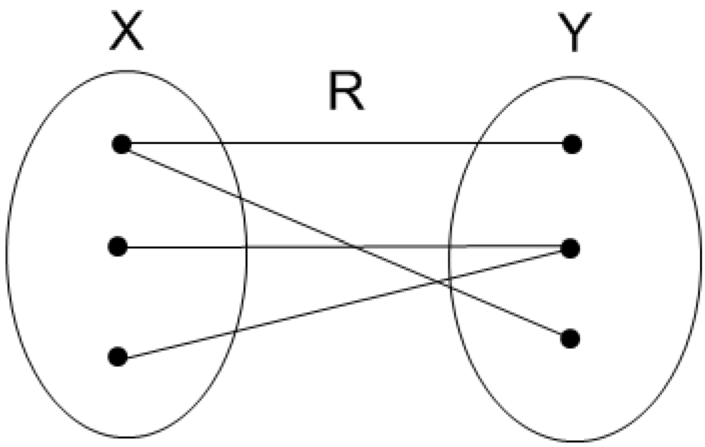
Satz 3.7 Sei M eine Menge und $xRy \iff: x \sim y$ eine Äquivalenzrelation.
(1) Die Äquivalenzklassen $[x] := \{y \in M \mid x \sim y\}$ bilden eine Partition der Menge M.
(2) Für die Partition $[A_i]_{i\in I}$ von M ist die folgende Relation R:
$xRy :\iff \exists i_0 \in I : x \in A_{i_0}$ und $y \in A_{i_0}$ eine Äquivalenzrelation.

Beweis: (1) zu zeigen: • $[x] \neq \varnothing$ für alle $x \in M$ (i)
• $\bigcup\limits_{x\in M} [x] = M$ (ii)
• $[x] \neq [y] \Rightarrow [x] \cap [y] = \varnothing$ (iii)

zu (i) da $\sim$ reflexiv ist, ist $x \in [x]$ und damit $[x] \neq \varnothing$
(ii) da $\sim$ reflexiv ist, ist $\bigcup\limits_{x \in M} [x] = M$
(iii) Beweis Kontraposition $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$
Zu zeigen: Falls es ein $z \in [x] \cap [y]$ gibt, ist $[x] = [y]$
Da $z \in [x]$ und $z \in [y]$ ist, folgt $x \sim z$ und $y \sim z$
Da unsere Relation symmetrisch ist, $x \sim z$ und $z \sim y$ durch die transitivität von $\sim$ so auch $x \sim y$.

Für $w \in [y]$ gilt $y \sim w$ durch transitivität und $x \sim y$ folgt $x \sim w$.
Somit insbesondere $[y] \subseteq [x]$, genauso $[x] \subseteq [y]$ und damit
$[x] = [y]$

Definition 3.8 Eine Abbildung ist eine besondere Relation.
$f : X \to Y$ von der Menge X in die Menge Y ist eine rechtseindeutige Relation.
$\forall x \in X, \forall y, y' \in Y : xRy \wedge xRy' \Rightarrow y = y'$

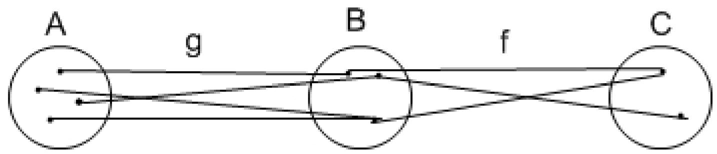


—> keine Funktion, da nicht rechtseineutig(einem Element aus X ist mehr als ein Element aus Y zugeordnet)

Schreibweise: $f(x) = y$ mit xRy.

Definition 3.9 Sei $f : X \to Y$ eine Funktion.
Dann heißt f : (1) <u>injektiv:</u> $\forall x, x' \in X : f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$
(2) <u>surjektiv:</u> $\forall y \in Y \exists x \in X : f(x) = y$
(d.h. für jedes y existiert ein x, mit $f(x) = y$)
(3) <u>bijektiv:</u> wenn f injektiv <u>und</u> surjektiv ist

Definition 3.10 Seien A, B, C Mengen, und $f : B \to C$,sowie $g : A \to B$ Abbildngen.



Die Abbildung
$f \circ g : A \to C$ (f kringel g)

$$\underset{A}{x} \mapsto \overbrace{f(\underbrace{g(x)}_{B})}^{C}$$

heißt verkettung von f und g.

Satz 3.11 Seien A,B,C,D Mengen, und
$f : C \to D$,$g : B \to C$,$h : A \to B$ Abbildungen.
Dann ist $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.

<u>Beweis:</u> Sei $x \in A$. Dann ist $[(f \circ g) \circ h)](x) = [f \circ g](h(x)) =$
$f(g(h(x))) = f[(g \circ h)(x)] = [f \circ (g \circ h)](x)$

4. Gruppen, Ringe, Körper

Definition 4.1 Eine (binäre) Verknüpfung auf einer Menge M ist eine Abbildung $*: M \times M \to M$

Bemerkung 4.2 Notation: statt $*(x, y)$ auch $x * y$

Beispiel 4.3 (1) $M = \mathbb{Z}, * = +$ (Abbildung)
(2) $M = \mathbb{R}, * = \cdot$ (Multiplikation)
(3) $M =$ beliebig, $\cap$ und $\cup$ Verknüpfung auf $\mathcal{P}(M)$

Definition 4.4 Seien A, B Mengen. Dann ist $A^B := \{f \mid f : B \to A\}$ die Menge aller Abbildungen von B nach A.

Beispiel 4.5 Sei M eine Menge. Dann ist die Verkettung $\circ : M^M \times M^M \to M^M$ eine Verknüpfung auf M^M.

Definition 4.6 (a) Eine Verknüpfung $* : M \times M \to M$ heißt:
kommutativ, falls $\forall x, y \in M : x * y = y * x$
assoziativ, falls $\forall x, y, z \in M : x * (y * z) = (x * y) * z$

(b) Falls $M \neq \varnothing$ und $*$ assoziative Verknüpfung, so heißt das Paar $(M, *)$ Halbgruppe.

Beispiel 4.7 (1) $(\mathbb{Z}, +)$, (2) $(\mathbb{Z}, \cdot)$
(3) $(\mathbb{N}, +)$, (4) $(\mathbb{N} \setminus \{0\}, +\}$
(5) $(2\mathbb{N}, +)$, (6) $(\mathbb{R}, +)$
(7) $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$

Beispiel 4.8 Eine Halbgruppe $(G, *)$ heißt Gruppe, falls
folgende Bedingungen erfüllt sind.
(1) $\exists e \in G, \forall g \in G : e * g = g$ (Neutralelement)
(2) $\forall g \in G, \exists h \in G : h * g = e$ (inverses Element)

Bemerkung 4.9 Man kann zeigen, dass e eindeutig ist.
Man kann zeigen, dass für jedes g, h eindeutig ist.
-> Man schreibt g^{-1} und nennt es "Inverses zu g"

Beispiel 4.10 (1) $(\mathbb{Z}, +)$ ist eine Gruppe
(2) $(\mathbb{R}, +)$, und $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ sind Gruppen
(3) Sei $E = \{e\}$ mit e beliebig. Dann definiert $e * e := e$
eine Verknüpfung auf E. $(E, *)$ ist eine sog. triviale Gruppe.
(4) Sei $M \neq \varnothing$ eine beliebige Menge, $\mathrm{Sym}(M) := \{f \mid f \in M^M \text{ bijektiv}\}$
Dann ist $(\mathrm{Sym}(M), \circ)$ eine Gruppe mit Neutralelement
$\mathrm{id}_M : M \to M : x \mapsto x$

Definition 4.11 Sei R eine Menge mit zwei Verknüpfungen,
$+ : R \times R \to R$ und $\cdot : R \times R \to R$
Das Tripel $(R, +, \cdot)$ heißt Ring, falls
(1) $(R, +)$ ist eine kommutative Gruppe
(2) $(R, \cdot)$ ist Halbgruppe
(3) $\forall a, b, c \in R : a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \wedge (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

Beispiel 4.12 (1) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ist ein Ring
(2) $(\mathbb{R}, +, \cdot), (\mathbb{Q}, +, \cdot), (\mathbb{C}, +, \cdot)$ sind Ringe

Definition 4.13 Ein Ring $(K+, \cdot)$ heißt Körper(mit additivem
Neutralelement Null), falls $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ eine kommutative Gruppe ist.

Beispiel 4.14 (1) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ist <u>kein</u> Körper

(2) $(\mathbb{R}, +, \cdot), (\mathbb{Q}, +, \cdot), (\mathbb{C}, +, \cdot)$ sind Körper

(3) $\mathbb{F}_2 := \{0, 1\}$ $(\mathbb{F}_2, +, *)$ ist ein Körper

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

Betrachte folgende Relation auf den ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$.

Sei $m \in \mathbb{Z}, m > 0$. Für $x, y \in \mathbb{Z}$ gilt $x \equiv_m y :\iff \exists k \in \mathbb{Z} : x - y = \text{km}$

x, y haben den selben Rest nach Division durch m.

$x \equiv_m y \iff x \equiv y (\mathrm{mod}\, m)$ ->"x kongruent y modulo m"

Behauptung: $\equiv_m$ ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$

<u>Beweis:</u> reflexivität: für alle $x \in \mathbb{Z}$ gilt $x \equiv_m x$, da $x - x = 0 = 0 \cdot m$

symmetrie: für alle $x, y \in \mathbb{Z}$ mit $x \equiv_m y$ gilt $x - y = km$ und $y - x = -km$ also $y \equiv_m x$.

transitivität: für $x, y, z \in \mathbb{Z}$ mit $x \equiv_m y$ und $y \equiv_m z$ existieren $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ mit $x - y = k_1 m$ und $y - z = k_2 m$. Da $x - z = (x - y) + (y - z) = (k_1 + k_2)m$ ist $x \equiv_m z$

Wie sehen die Äquivalenzklassen aus?

$m = 2$

$[0] = \{2, 4, 6, ...\} \cup \{-2, -4, -6, ...\}$

$[1] = \{\pm 1, \pm 3, \pm 5, ...\}$

$m = 3$

$[0] = \{0 \pm 0 \cdot 3, 0 \pm 1 \cdot 3, 0 \pm 2 \cdot 3, ...\}$

$[1] = \{1 \pm 0 \cdot 3, 1 \pm 1 \cdot 3, 1 \pm 2 \cdot 3, ...\}$

$[2] = \{2 \pm 0 \cdot 3, 2 \pm 1 \cdot 3, 2 \pm 2 \cdot 3, ...\}$

Für allgemeines $m \in \mathbb{Z}$ sind die Äquivalenzklassen $0 \le x < m, x \in \mathbb{Z}$

$[x] = \{x, x \pm 1 \cdot m, x \pm 2 \cdot m, ...\}$

$= x + m\mathbb{Z}$

Wir bezeichnen diese Menge von Äquivalenzklassen mit

$\mathbb{Z}/ \equiv_m = \mathbb{Z}_{/m\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}_m$

Der Restklassenring $\mathbb{Z}_{/m\mathbb{Z}}$($\mathbb{Z}$ modulo $m\mathbb{Z}$):
mit zwei Verknüpfungen für $[x], [y]$ in $\mathbb{Z}_{/m\mathbb{Z}}$:
$[x] \oplus [y] := [x + y]$
$[x] \odot [y] := [x \cdot y]$
Wohldefiniertheit von $\oplus$ und $\odot$. Für $x, x', y, y' \in \mathbb{Z}$ mit
$[x] = [x']$ und $[y] = [y']$ gilt $[x] \oplus [y] = [x'] \oplus [y']$ und
$[x] \odot [y] = [x'] \odot [y']$.

Da $[x] = [x']$ und $[y] = [y']$ existieren $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ mit
$x - x' = k_1 m$ und $y - y' = k_2 m$, sodass
$[x] \oplus [y] = [x + y] = [(x' + k_1 m) + (y' + k_2 m)] = [x' + y']$
$= [x'] \oplus [y']$

Genauso folgt: $[x] \odot [y] = [x'] \odot [y']$

Satz 4.16 $(\mathbb{Z}_{/m\mathbb{Z}}, \oplus, \odot)$ ist ein kommutativer Ring mit EInselement.
Beweis: (1) $(\mathbb{Z}_{/m\mathbb{Z}}, \oplus)$ ist abelsche Gruppe
(2) $(\mathbb{Z}_{/m\mathbb{Z}}, \odot)$ ist Halbgruppe
(3) Es existiert ein multiplikatives neutrales Element
(4) $(\mathbb{Z}_{/m\mathbb{Z}}, \odot)$ ist kommutativ
(5) Distributivität

zu (1) für $[x] \in \mathbb{Z}_{/m\mathbb{Z}}$ gilt:
$[x] \oplus [0] = [x]$
$[x] \oplus \underbrace{[-x]}_{m-x} = [0]$
$[x] \oplus [y] = [x + y] = [y + x] = [y] \oplus [x], \forall [x],\ [y] \in \mathbb{Z}_{/m\mathbb{Z}}$
Assoziativität vererbt sich von $\mathbb{Z}$.

zu (2) $(\mathbb{Z}_{/m\mathbb{Z}}, \odot)$ ist eine Halbgruppe, da $(\mathbb{Z}, \cdot)$ eine Halbgruppe ist.
$([x] \odot [y]) \odot [z] = [x \cdot y] \odot [z] = [x \cdot y \cdot z] = [x] \odot [y \cdot z] = [x] \odot ([y] \odot [z])$

zu (3) $\forall [x] \in \mathbb{Z}$ gilt $[1] \odot [x] = [x]$

zu (4) $(\mathbb{Z}, \cdot)$ kommutativ $\Rightarrow (\mathbb{Z}_{/m\mathbb{Z}}, \odot)$ kommutativ

$[x] \odot [y] = [x \cdot y] = [y \cdot x] = [y] \odot [x]$

zu (5) Distributivität folgt aus Distributivität von $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$
$[x] \odot ([y] \oplus [z]) = [x] \odot [y + z] = [xy + xz] = [xy] \oplus [xz] \wedge$
$([x] \oplus [y]) \odot [z] = [x + y] \odot [z] = [xz + yz] = [xz] \oplus [yz]$

Definition 4.17 Sei R ein Ring. R heißt nullteilerfrei, falls für $a, b \in R$ gilt
$a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0 \vee a = b = 0$

Satz 4.18
$(\mathbb{Z}_{/m\mathbb{Z}}, \oplus, \odot)$ ist genau dann nullteilerfrei, wenn m eine Primzahl ist.

Beweis: "$\Rightarrow$": wenn m keine Primzahl ist gibt es Nullteiler.
$[x], [y] \in \mathbb{Z}_{/m\mathbb{Z}}$ mit $[x] \neq [0] \neq [y]$, aber $[x] \odot [y] = 0$
da m keine Primzahl ist, existieren $x, y \in \mathbb{Z}$ mit $x \neq 1, y \neq 1, x \neq m, y \neq m$
mit $x \cdot y = m$.
$\Rightarrow [x] \odot [y] = [x \cdot y] = [m] = [0]$

"$\Leftarrow$" Seien $[x], [y] \in \mathbb{Z}_{/m\mathbb{Z}}$ mit $[x] \odot [y] = [0]$
$\Rightarrow [x \cdot y] = [0]$ damit existiert ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $x \cdot y = k \cdot m$
-> da m eine Primzahl ist, ist sie nicht zerlegbar
-> entweder x oder y ist durch m teilbar
-> damit ist $[x] = [0]$ oder $[y] = [0]$

Kapitel 2 Vektorräume

1. Definitionen und erste Beispiele

Definition 1.1 Sei K ein Körper. Ein K-Vektorraum ist ein Tripel $(V, +, \cdot)$ bestehend aus einer Menge V, einer binären Verknüpfung
$+ : V \times V \to V$
sowie einer Skalarmultiplikation
$\cdot : K \times V \to V$
sodass gilt:
(1) $(V, +)$ ist eine abelsche Gruppe
(2) Für alle $v, w \in V$ und $\lambda, \mu \in K$ gilt:

(a) $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$
(b) $\lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w$
(c) $\lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda \cdot \mu) \cdot v$
(d) $1 \cdot v = v$

Beispiel 1.2 Standardvektorraum
$K^n = [K \times K \times ... \times K]$ (n-mal)
$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| x_i \in K, \forall i \in 1, \dots, n \right\}$$

Beispiel 1.3 K^M Abbildungen einer Menge M über einem Körper K.

Beispiel 1.4 Für $n \in \mathbb{N}$ ist $K^n := K \times K \times ... \times K$ (n-mal)
$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} | \, x \in K \right\}$$

Der <u>Standardvektorraum</u>(der Dimension n) über K mit

Addition $$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}_{\text{neue Addition}} = \overbrace{\begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}}^{\text{Addition in } K}$$

und Skalarmultiplikation $$\underbrace{\lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\text{Skalarmultiplikation}} = \overbrace{\begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}}^{\text{Multiplikation in } K}$$

Der <u>Nullvektor</u> $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ ist das Neutralelement der Addition in K^n.

$$0 + \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + x_1 \\ \vdots \\ 0 + x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Inverses von $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$ bezüglich $+$: $-x = \begin{pmatrix} -x_1 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix}$

Analog werdne die übrigen Vektoraxiome für K^n überprüft anhand der Eigenschaften von K.

Beispiel 1.5 Sei K ein Körper und M eine Menge.
$K^M := \{f \mid f \text{ Abbildung von } M \text{ nach } K\}$
ist mit $[f + g](x) := f(x) + g(x),\ f, g \in K^M$
und $[\lambda f](x) := \lambda f(x), \lambda \in K$
ein K-Vektorraum.

2. Linearkombinationen

Es sei $(v_1, \dots, v_k)$ ein geordnetes k-Tupel von Vektoren v_i
eines K-Vektorraums(K-VR) V.

Definition 2.1 Ein Vektor $v \in V$ heißt Linearkombination von $(v_1, \dots, v_k)$,
falls $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_k \in K$ sodass $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k$
Ein Vektor $v \in V$ heißt Affinkombination, falls zustzlich gilt:
$\sum_{i=1}^{k} \lambda_k = 1.$

Definition 2.2 Speziell für $K = \mathbb{R}$(oder allgemeiner angeordneter Körper)
heißt eine Affinkombination $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k$
Konvexkombination, falls $\sum_{i=1}^{k} \lambda_k = 1.$ und zusätzlich
$\forall \lambda_i, \forall i = 1, \dots, k : \lambda_i \geq 0$ (somit auch $\lambda_i \leq 1$)

Definition 2.3 Das k-Tupel von Vektoren $v_1, \dots, v_k$ heißt linear unabhängig,
falls $\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in K^n$:$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_k$
andernfalls linear abhängig.

Lemma 2.4 Sei $(v_1, \dots, v_k)$ linear unabhängig.
(1) Für jede Permutation für $\pi \in \mathrm{Sym}(\{1, \dots, k\})$ ist
auch $(v_{\pi(1)}, v_{\pi(2)}, \dots, v_{\pi(k)})$ linear unabhängig.
(2) Jede Teilfamilie $(v_1, \dots, v_i)$ für $i \leq k$ ist linear unabhängig

Beweis: (1) Sei $\pi \in \mathrm{Sym}(\{1, \dots, k\})$ und seien $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in K$
mit $\lambda_1 v_{\pi(1)} + \lambda_2 v_{\pi(2)} + \dots + \lambda_k v_{\pi(k)} = 0$
$= \lambda_{\pi^{-1}(1)} v_1 + \dots + \lambda_{\pi^{-1}(k)} v_k$
$\Rightarrow \lambda_{\pi^{-1}(1)} = \dots = \lambda_{\pi^{-1}(k)} = 0$

(2) Sei $i \leq k$. Angenommen es existieren $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in K$ mit
$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_i v_i = 0$ und $\lambda_j \neq 0$, für ein $j \in \{1, \dots, i\}$
$\Rightarrow 0 = \lambda_1 v_1 + \dots + \underbrace{\lambda_j v_j}_{\neq 0} + \dots + \lambda_i v_i + 0 \cdot v_{i+1} + \dots + 0 \cdot v_k$
->Widerspruch zu Voraussetzung(lin. unabh.)

Beispiel 2.5 Im Standard VR K^n sind die Vektoren

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, e_k \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \quad k - \text{te Zeile}$$

$$e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ sind linear unabhängig}$$

Beispiel 2.6 (0) ist linear abhängig.
$x \in V \setminus \{0\}$ -> immer linear unabhängig
$(x, x, \dots, x)$ Wenn x mehr als einmal vorkommt, immer linear abhängig.

Definition 2.7 Eine unendliche Familie von Vektoren in V heißt linear unabhängig, falls jede endliche Teilfamilie linear unabhängig ist.

Proposition 2.8 Für $n = 2$ sind $v_1, v_2, \dots, v_n$ linear abhängig, genau dann, wenn einer dieser Vektoren eine Linearkombination der anderen ist.

<u>Beweis:</u> Seien $v_1, v_2, \dots, v_n$ linear abhängig, dann existieren
$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in K$ mit $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0$ mit $\lambda \neq 0$
z.B. $\lambda_1 \Rightarrow \lambda_1 v_1 = -\lambda_2 v_2 - \dots - \lambda_n v_n$
$\Rightarrow \underbrace{\lambda_1^{-1} \lambda_1}_{=1} v_1 = -\lambda_1^{-1} \lambda_2 v_2 - \dots - \lambda_1^{-1} \lambda_n v_n$
$\Rightarrow v_1 = -\lambda_1^{-1} \lambda_2 v_2 - \dots - \lambda_1^{-1} \lambda_n v_n$

3. Unterräume

Sei V ein K-VR.

Definition 3.1 Eine nichtleere Teilmenge $U \subseteq V$ heißt Unterraum, falls $\forall \lambda, \mu \in K \forall u, v \in U : \lambda u + \mu v \in U$

Bemerkung 3.2 Jeder Unterraum ist selbst ein K-VR.
Wegen $U \neq 0 \exists u \in U : 0 \cdot u + 0 \cdot u = 0 \in U$.
Notation: $U \leq V$

Beispiel 3.3 (1) $\{0\} \leq V, V \leq V$
(2) Die Lösungen eines homogenen linearen Gleichungssystems bilden einen Unterraum.
$\alpha_{ij} \in K, x_1, \ldots, x_n$ unbestimmte

$$\begin{array}{ccc} \alpha_{11}x_1 & + \cdots + & \alpha_{1n}x_n = 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1}x_1 & + \cdots + & \alpha_{mn}x_{n=0} \end{array}$$

bilden einen Unterraum in K^n.
(3) Betrachte den $\mathbb{R} - \text{VR}$ aller Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$:$\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$
Dann bilden: - die stetigen Funktionen einen Unterraum
-die differenzierbaren Funktionen einen Unterraum
(4) Betrachte die einmal stetig differenzierbaren Lösungen $u \in C^1([0,1])$ der Differentialgleichung $\dot{u}(t) = a(t) \cdot u(t)$ für $a \in C^1([0,1])$. Diese Lösungen bilden einen Teilraum von $C^1([0,1])$.

Proposition 3.4 Seien U, W Unterräume des K-VR V. Dann sind:
(1) $U \cap W$ und
(2) $U + W := \{u + w \mid u \in U, w \in W\}$

Unterräume von V.

Beweis: (1) -> Aufgabenblatt 3

(2) $0 \in U, 0 \in W$ da der Nullvektor in jedem Unterraum enthalten ist.

$\Rightarrow 0 = 0 + 0 \in U + W \Rightarrow U + W \neq \varnothing$, da der Nullvektor enthalten ist.

Seien $u + w, u' + w' \in U + W$ und $\lambda, \lambda' \in K$

$\Rightarrow \lambda(u + w) + \lambda'(u' + w') = \lambda u + \lambda w + \lambda' u' + \lambda' w'$

$= (\lambda u \underset{\in U}{+} \lambda' u') + (\lambda w \underset{\in W}{+} \lambda' w')$

$\Rightarrow \in U + W$

$\square$

Definition 3.5 Sei V ein K-VR $M \subseteq V$ eine beliebige Teilmenge.

$\mathrm{lin}(M) := \{\lambda_1 m_1 + \ldots + \lambda_k m_k \mid \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in K, m_1, \ldots, m_k \in M\}$

falls $M \neq \varnothing$. Für $M = \varnothing$ setze $\mathrm{lin}(\varnothing) := \{0\}$ - lineare Hülle.(Aufspann)

Bemerkung " $\subseteq$ " ist eine partielle Ordnung auf $\{U \mid U \in V\}$.

Proposition 3.6 Der Aufspann $\mathrm{lin}(M)$ ist der kleinste Unterraum von V der M enthält.

Beweis: Zu zeigen: $\mathrm{lin}(M)$ ist ein UVR: ohne Einschränkung ist $M \neq \varnothing$.

Seien $\lambda_1 m_1 + \ldots + \lambda_k m_k, \mu_1 n_1 + \ldots + \mu_k n_k \in \mathrm{lin}(M)$ und $\alpha, \beta \in K$

$\Rightarrow \alpha \cdot (\lambda_1 m_1 + \ldots + \lambda_k m_k) + \beta \cdot (\mu_1 n_1 + \ldots + \mu_k n_k)$

$= \underset{\in K}{\alpha\lambda_1} \underset{\in M}{m_1} + \ldots + \underset{\in K}{\alpha\lambda_k} \underset{\in M}{m_k} + \underset{\in K}{\beta\mu_1} \underset{\in M}{n_1} + \ldots + \underset{\in K}{\beta\mu_k} \underset{\in M}{n_k}$

Zeige: $\mathrm{lin}(M)$ ist kleinster Unterraum der M enthält.

Sei $U \leq V$ mit $M \subseteq U$. Zeige $\mathrm{lin}(M) \subseteq U$.

Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in K$ und $m_1, \ldots, m_k \in M$.

Zeige nun: $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i m_i \in U$

Beweis per Induktion nach k.

Induktionsanfang: $k = 1$, $\lambda_1 m_1 \in U$

Induktionsvoraussetzung: $\sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i m_i \in U, k \geq 2$

Induktionsschluss: $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i m_i = \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i m_i + \lambda_k m_k \in U$

$\square$

Induktionsprinzip: Familie von Aussagen $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$

Satz 3.6 Falls $\exists k_0 \in \mathbb{N} : A_k \wedge \forall k > k_0 : A_{k_0 - 1} \iff A_{k_0}$
Dann gilt auch $\forall k \geq k_0 : A_k$

4. Unterräume in $\mathbb{R}^2$

Offenbar: $\{0\}, \mathbb{R}^2 \leq \mathbb{R}^2$ ("triviale" Unterräume)
Sei $U \leq \mathbb{R}^2$ mit $u \in U, u \neq 0 \Rightarrow \operatorname{lin}(u) := \operatorname{lin}(\{u\}) = \{\lambda u \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \subseteq U$
Fall1: $v \in U \setminus \operatorname{lin}(u)$
Behauptung: $U = \mathbb{R}^2$
Seien $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$
Offenbar $(u_1 v_2 - v_1 u_2) \neq 0$ wegen $v \notin \operatorname{lin}(u)$
denn sonst: $u_1 \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} - v_1 \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 v_1 - v_1 u_1 \\ u_1 v_2 - v_1 u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$
$\Rightarrow u_1 = v_1 = 0$ oder $\underbrace{(u,v) \text{ abhängig}}_{\text{Widerspruch zu } v \notin \operatorname{lin}(u)}$

$$\Rightarrow \underbrace{u = \begin{pmatrix} 0 \\ u_2 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \end{pmatrix}}_{\text{Widerspruch zu } v \notin \operatorname{lin}(u)}$$

Sei $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow (v_2 x_1 - v_1 x_2) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + (u_1 x_2 - u_2 x_1) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} u_1 v_2 x_1 - u_1 v_1 x_2 \\ u_2 v_2 x_1 - u_2 v_1 x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 v_1 x_2 - u_2 v_1 x_1 \\ u_1 v_2 x_2 - u_2 v_2 x_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (u_1 v_2 - u_2 v_1) x_1 \\ (u_1 v_2 - u_2 v_1) x_2 \end{pmatrix} = (u_1 v_2 - u_2 v_1) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \left[\frac{1}{u_1 v_2 - u_2 v_1} ((v_2 x_1 - v_1 x_2) u + (u_1 x_2 - u_2 x_1) v) \right]$$

5. Wie testet man lineare Unabhängigkeit?

Beispiel 5.1 $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$

u, v, w sind linear abhängig, genau dann wenn

$\exists \lambda, \mu, \vartheta \in \mathbb{R} : (\lambda, \mu, \vartheta) \neq (0,0,0)$, sodass $\lambda u + \mu v + \vartheta w = 0$

$$0 = \lambda u + \mu v + \vartheta w = \left\{ \begin{array}{c} \lambda + 0 + 3\vartheta = 0 \\ 0 + \mu + (-1)\vartheta = 0 \\ (-1)\lambda + \mu + (-4)\vartheta = 0 \\ 0 + 2\mu + (-2)\vartheta = 0 \end{array} \right\}$$

D.h. u, v, w linear abhängig, wenn das lineare LGS eine nichttriviale Lösung hat.

Wegen $(-3)u + v + w = 0$ heißen die Vektoren linear abhängig.

6. Basen und Erzeugendensysteme

Sei V ein K-VR.

Definition 6.1 (1) Eine Menge $M \subseteq V$ heißt Erzeugendensystem von V, falls $\text{lin}(M) = V$.

(2) Basis von V, wenn M ein linear unabhängiges Erzeugendensystem ist.

Beispiel 6.2 Im Standard-VR K^n bilden die Vektoren $e_1, e_2, \dots, e_n$ eine Basis, dann $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \cdot e_1 + x_2 \cdot e_2 + \dots + x_n \cdot e_n$

Beispiel 6.3 (u, v) ist Basis von $\text{lin}(u, v, w) \leq \mathbb{R}^4$

Beispiel 6.4 Sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $K' \subseteq K$, sowie $(K', +, \cdot)$ ein Teilkörper von K.$\Rightarrow$ K ist auch ein $K' -$ VR

$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ $\quad (1, i)$ Basis des $\mathbb{R} -$ VR $\mathbb{C}$

Definition 6.5 Ein K-VR V heißt endlich erzeugt, falls er ein endliches Erzeugendensystem besitzt.

Satz 6.6 Sei $V \neq \{0\}$ ein K-VR und $(v_i)_{i\in I}$ eine Familie in V. Dann sind folgende Aussagen Äquivalent:
(1) $(v_i)_{i\in I}$ ist eine Basis von V
(2) $(v_i)_{i\in I}$ ist ein unverkürzbares Erzeugendensystem von V
d.h. $\forall J \subsetneqq I : \text{lin}\{v_j \mid j \in J\} \neq V$
(3) $(v_i)_{i\in I}$ ist eine unverlängerbare linear unabh. Familie,
d.h. $\forall J \supsetneqq I : (v_j)_{j\in J}$ linear abhängig
(4) Jeder Vektor aus V lässt sich eindeutig als Linearkombination der Vektoren aus $(v_i)_{i\in I}$ schreiben.

<u>Beweisstrategie:</u> (1)⇒(2)⇒(3)⇒(4)⇒(1)
(1)⇒(2): Sei $(v_i)_{i\in I}$ Basis von V. Dann ist $(v_i)_{i\in I}$ auch ein Erzeugendensystem von V.
Angenommen es ist nicht unverkürzbar, dann existiert
$J \subsetneqq I : \text{lin}\{v_j \mid j \in J\} = V$
Sei $i_0 \in I \setminus J$ Dann existieren $v_{j_1}, \dots, v_{j_k}$ mit $(j_1, \dots, j_k) \subseteq J$ und
$\lambda_1, \dots, \lambda_k \in K : v_{j_0} = \lambda_1 v_{j_1} + \dots + \lambda_k v_{j_k}$
$\Rightarrow (v_i)_{i\in I}$ linear abhängig; Widerspruch zur Voraussetzung, dass $(v_i)_{i\in I}$ eine Basis ist.

(2)⇒(3): Sei $(v_i)_{i\in I}$ ein unverkürzbares Erzeugendensystem von V.
Behauptung: $(v_i)_{i\in I}$ ist linear unabhängig.
Wegen $V \neq \{0\}$ gilt $I \neq \varnothing$. Falls $I = \{i_0\}$ eindeutig.
$\Rightarrow v_{i_0} \neq 0 \Rightarrow v_{i_0}$ linear unabhängig.

Also können wir Annehmen, dass I mindestens 2 Elemente enthält.
Angenommen $(v_i)_{i\in I}$ ist linear abhängig, $\exists i_0 \in I : \exists i_1, \dots, i_k \in I$,
$\exists \lambda_1, \dots, \lambda_k \in K : v_{i_0} = \lambda_1 v_{i_1} + \dots + \lambda_k v_{i_k}$ ist Erzeugendensystem von V. Dies steht im Widerspruh zur Voraussetzung, dass v_i unverkürzbar ist.

Behauptung: Es existiert kein $J \supsetneqq I : (v_j)_{j \in J}$ linear unabhängig.
Angenommen es existiert ein $J \supsetneqq I : (v_j)_{j \in J}$ linear abhängig,
dann existiert ein $j_0 \in J \setminus I$; Da $(v_i)_{i \in I}$ ist Erzeugendensys. von V
$\Rightarrow$ existieren $i_1, \ldots, i_k \in I, \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in K : v_{j_0} = \lambda_1 v_{i_1} + \ldots + \lambda_k v_{i_k}$
$\Rightarrow (v_i)_{i \in I \cup \{j_0\}}$ linear abhängig
$\Rightarrow (v_j)_{j \in J}$ linear abhängig -> Widerspruch zu v_i lin. unabh.

Restl. Beweise verbleiben als Übung.

Korollar 6.7 (Basisaustauschsatz)
Sei V ein K-VR mit einem endlichen Erzeugendensystem
$(v_1, \ldots, v_n)$ von V. Dann existiert eine Teilmenge $J \subseteq \{1, \ldots, n\}$,
sodass $(v_j)_{j \in J}$ Basis von V.

Bemerkung 6.8 Jeder endlich erzeugte K-VR besitzt eine Basis.
Alle K-VR Besitzen eine Basis.
(Beweis benutzt das sog. "Auswahlaxiom"
[ZFC = Zermelo-Fraenkel-Choice], die übliche Axiomatisierung
der Mengenlehre.)

7. Lineare Gleichungssysteme

Sei K ein Körper.

$$* \left[\begin{array}{r} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2n}x_n = \beta_2 \\ \vdots \\ \alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \ldots + \alpha_{mn}x_n = \beta_m \end{array}\right.$$

* ist ein lineares Gleichungssystem(LGS)
Fragen: Gibt es Lösungen?

- falls ja: ist die Lösung eindeutig?
- falls nicht eindeutige Lösungen, beschreibe alle Lösungen
- gibt es einen Alghorithmus?

Definition 7.1
Das LGS ($\star$) heißt homogen, falls $\beta_1 = \beta_2 = ... = \beta_m = 0$
ansonsten heißt es inhomogen.

Bemerkung 7.2 Im homogenen Fall bilden die Lösungen von ($\star$) einen Unterraum von K^n.

Spezialfälle

Beispiel 7.3 $m = n = 1$ gegeben $\alpha, \beta \in K$ gesucht, $x \in K$, $\alpha x = \beta$
Fall: $\alpha \neq 0 \Rightarrow x = \beta \cdot \alpha^{-1} = \frac{\beta}{\alpha}$ einzige Möglichkeit$\Rightarrow$eindeutig
Fall: $\alpha = 0 \wedge \beta \neq 0 \Rightarrow$keine Lösung
$\alpha = 0 \wedge \beta = 0 \Rightarrow x$ hat ∞ Lösungen, oder die Lösungsmenge ist K.

Beispiel 7.4 $m = 1, n = 2$ für $\alpha_1, \alpha_2, p \in K : \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = \beta$
Lösungemenge$\subseteq K^2$

Fallunterscheidung:
$\alpha_1 \neq 0 \wedge \alpha_2 \neq 0$ wähle $\lambda \in K$, setze $x_2 := \lambda$ und $x_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\lambda + \frac{\beta_1}{\alpha_1}$
$\Rightarrow$Lösungemenge: $\left\{ \begin{pmatrix} -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\lambda + \frac{\beta_1}{\alpha_1} \\ \lambda \end{pmatrix} \middle| \lambda \in K \right\}$
Falls $\beta = 0 \Rightarrow$ Lösungsmenge $= \left\{ \lambda \cdot \begin{pmatrix} -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \lambda \in K \right\}$
$= \operatorname{lin}\begin{Bmatrix} -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \\ 1 \end{Bmatrix} \leq K^2$

$\alpha_1 = 0 \wedge \alpha_2 \neq 0$
analog Lösungsmenge
$L = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda \\ \frac{\beta}{\alpha_2} \end{pmatrix} \middle| \lambda \in K \right\}$
Falls zusätzlich $\beta = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ Basis des Lösungsraums

$\alpha_1 = 0 \wedge \alpha_2 = 0$
Falls zusätzlich $\beta \neq 0 \Rightarrow$die Lösungsmenge$= \varnothing$
Falls $\beta = 0$, dann ist jeder Vektor aus K^2 eine Lösung.

8. Der Gauß-Jordansche Eliminaitonsalghorithmus

Beobachtung:

$$\Rightarrow * m - \text{Gleichungen} \left[\begin{array}{c} \alpha_{11}x_1 + ... + \alpha_{1n}x_n = \beta_1 \\ \alpha_{21}x_1 + ... + \alpha_{1n}x_n = \beta_2 \\ \vdots \\ \alpha_{m1}x_1 + ... + \alpha_{mn}x_n = \beta_m \end{array}\right.$$

Die Lösungsmenge von (*) ändert sich nicht unter den
Elementaroperationen:
(E1) Addieren zu einer Gleichung das λ-Fache($\lambda \in K$) einer anderen Gleichung
(E2) Tausche 2 Gleichungen
(E3) Multiplizieren einer Gleichung mit $\lambda \in K \setminus \{0\}$

Falls $\alpha_{11} \neq 0$: Subtrahiere $\frac{\alpha_{21}}{\alpha_{11}}$-fache von der zweiten.
$\frac{\alpha_{31}}{\alpha_{11}}$-fache von der dritten abziehen
$\vdots$
$\frac{\alpha_{m1}}{\alpha_{11}}$-fachte von der m-ten abziehen

Danach sieht das modifizierte LGS so aus:

$$\begin{array}{cccccc} \alpha_{11}x_1 & +\alpha_{12}x_2 & +\dots & +\alpha_{1n}x_n & = \beta_1 \\ 0 & +\left(\alpha_{22} - \frac{\alpha_{21}\cdot\alpha_{12}}{\alpha_{11}}\right) x_2 & +\dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

Falls $\alpha_{11} = 0$ suche $i \in \{2, 3, ... , m\}$ mit $\alpha_{i_1} \neq 0$:
Vertausche 1. und n-te Zeile, falls das nicht existiert tue nichts und verfahre wie oben.

Danach sieht das modifizeirte LGS so aus:

$$\begin{array}{lllll} \alpha'_{11}x_1 & +\alpha'_{12}x_2 & +\cdots+ & \alpha'_{1n}x_n = \beta'_1 & \\ 0 & +\alpha'_{22}x_2 & +\cdots+ & \alpha'_{2n}x_n = \beta'_2 & (**) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & +\alpha'_{m2}x_2 & +\cdots+ & \alpha'_{mn}x_n = \beta'_m & \end{array}$$

$\alpha'_{ij}, \beta'_i \in K$ die Zeilen 2,3,...,m bilden ein LGS wie unter (*) mit nur m-1 Gleichungen und n-1 Unbestimmten.

Nach ingesamt höchstens m-1 Gauß-Schritten entsteht:

$$\begin{array}{llllll} \gamma_{1j_1}x_{j_1} & +\gamma_{1j_{1+1}}x_{j_{1+1}} & +\cdots+ & \gamma_{1n}x_n & = \delta_1 & \\ 0 & +\gamma_{2j_2}x_{j_2} & +\cdots+ & \gamma_{2n}x_n & = \delta_2 & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & \ddots & \gamma_{rj_r}x_{j_r} + \ldots + & \gamma_{rn}x_n & = \delta_r & (***) \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & = \delta_{r+1} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & = \delta_m & \end{array}$$

$\text{Pivot} - \text{Variablen}$

$r \in \{0, 1, \ldots, m\}, \forall k \in \{1, \ldots, r\} \gamma_{kj_k} \neq 0$

$1 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_r < n$

Wie bestimmt man die Lösungen von ***(und damit auch von *, da wir nur E-Operationen Ausgeführt haben)?

<u>Fall1:</u> $\delta_{r+1} \neq 0$ oder $\delta_{r+2} \neq 0$ oder....oder $\delta_m \neq 0$

⇒keine Lösung

<u>Fall2:</u> $\delta_{r+1} = \delta_{r+2} = \ldots = \delta_m = 0$

•Wähle beliebige Werte aus K für jede Nicht-Pivot-Variable

•Löse r-te Gleichung auf: $x_{j_r} = \gamma_{rj_r}^{-1} \cdot (\delta_r - \gamma_{rj_{r+1}}x_{j_{r+1}} - \ldots - \gamma_{rn}x_n)$

•Danach die r-1te Zeile usw.

Bemerkung 8.1 $r = n \wedge \delta_{r+1} = \ldots = \delta_m = 0$

⇒ Eindeutige Lösung

Beispiel 8.2 $K = \mathbb{R}, m = 3, n = 4$

$$\begin{array}{llllll} \pi x_1 & +13x_2 & & +x_4 & = 17 \\ & \sqrt{2}x_2 & +3x_3 & & = 0 \\ & & & 0 & = 3 \end{array}$$

$r = 2, j_1 = 1, j_2 = 2$

Lösungsmenge= $\varnothing$

Beispiel 8.3 $K = \mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}_3$

$\mathbb{F}_3$

$+$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

$\cdot$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

$m = n = 3$

$$\begin{array}{llllll} x_1 & +x_2 & +2x_3 & = 0 & \mathrm{I} \\ x_1 & +2x_2 & & = 1 & \mathrm{II} \\ 2x_1 & & +x_3 & = 2 & \mathrm{III} \end{array}$$

$$\begin{array}{lllll} x_1 & +x_2 & +2x_3 & = 0 & \mathrm{I} \\ & 2x_2 & +x_3 & = 0 & \mathrm{IV}: \mathrm{II} + \mathrm{III} \\ & x_2 & & = 2 & \mathrm{V}: \mathrm{I} + \mathrm{III} \end{array}$$

$$\begin{array}{lllll} x_1 & +x_2 & +2x_3 & = 0 & \mathrm{I} \\ & 2x_2 & +x_3 & = 1 & \mathrm{IV} \\ & & x_3 & = 2 & \mathrm{VI}: \mathrm{V} + \mathrm{IV} \end{array}$$

$x_3 = 2, x_2 = 2, x_1 = 0$

$\Rightarrow$Lösung ist der Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_3^3$

Der homogene Fall

$r =$Rang der Zeilenstufenform

In der Zeilenstofenform ist dann $\delta_1 = ... = \delta_m = 0$

Es gibt m Gleichungen mit n Unbestimmten

Wir können $n-r$ verschiedene Lösungen angeben.
• b_k entsteht durch die folgende Wahl der nicht-Pivot-Variablen
$k \in \{1, \dots, n-r\}$ man wählt für die $k-$ te nichi-Pivot-Var. 1
und für alle anderen 0

Proposition 8.4 $(b_1, \dots, b_{n-r})$ ist Basis des Lösungraums.
Beweis: Übung
Für $r = n$ ist $0 \in K^n$ die einzige Lösung.

Der inhomogene Fall

Im inhomogenen Fall bestimmen wir eine spezielle Lösung $\widetilde{x}$
für das inhomogene System nach B.
Jede andere Lösung entsteht als Summe $\widetilde{x}$ und einer Lösung
des zugehörigen homogenen System.

Beispiel 8.5 $K = \mathbb{C}, m = 3, n = 4$

$$\begin{array}{llllll} x_1 & + \ x_2 & + \ x_3 & + \ x_4 & = \ 0 \\ & 2x_2 & +3ix_3 & & = 1+2i \\ x_1 & +3x_2 & +(1+3i)x_3 & +x_4 & = 1+2i \end{array}$$

Lösung siehe UE
Spezielle Lösung $\widetilde{x}$ ist die Lösung für
$x_3 = x_4 = 0$

Das zugehörige homogene System:

$$\begin{array}{ll} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 & \mathrm{I} \\ \quad 2x_2 + 3ix_3 = 0 & \mathrm{II} \end{array}$$

hat Basislösungen b_1, b_2

$$b_1 = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{12} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} b_{21} \\ b_{22} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^4$$

b_1 in II einsetzen:
$2b_{12} + 3i \cdot 1 = 0$
$b_{12} = -\frac{3}{2}i$

b_{11} durch einsetzen in I

$b_{11} + \left(-\frac{3}{2}i\right) + 1 = 0$

$b_{11} = -1 + \frac{3}{2}i$

-> $b_1 = \begin{pmatrix} -1+\frac{3}{2}i \\ -\frac{3}{2}i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

b_{22} durch einsetzen von b_2 in II

$2b_{22} + +0 + 0 = 0$

-> $b_{22} = 0$

b_{21} durch einsetzen von b_2 in I

$b_{21} + 0 + 0 + 1 = 0$

$b_{21} = -1$

->$b_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Insgesamt ist die Lösungsmenge

$\widetilde{x} + \mathrm{lin}(b_1, b_2)$

$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} - i \\ +\frac{1}{2} + i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{lin}\left\{ \begin{pmatrix} -1+\frac{3}{2}i \\ -\frac{3}{2}i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

-> offener Unterraum in $\mathbb{C}^4$

9. Der Basisaustauschsatz

Sei V ein K-VR der endlich erzeugt ist.

Lemma 9.1(Austauschlemma)

Sei $(v_1, \dots, v_r)$ eine Basis von V und $w = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r$ für $\lambda_i \in K$. Ist $\lambda_k \neq 0$ für ein $k \in \{1, \dots, r\}$ dann ist $(v_1, \dots, v_{k-1}, w, v_{k+1}, \dots, v_r)$ Basis von K.

Beweis: (i) Œ ist $k = 1$.(ansonsten umnummerieren)

Zeige: $(w, v_2, v_3, \dots, v_r)$ ist Erzeugendensystem von V.
Sei $v \in V$ beliebig. Dann existieren $\mu_1, \dots, \mu_r \in K$, sodass
$v = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_r v_r$
$v_1 = \frac{1}{\lambda_1}(w - \lambda_2 v_2 - \dots - \lambda_r v_r),\ \lambda_1 \neq 0$
$\Rightarrow v = \mu_1 \left(\frac{1}{\lambda_1} w - \lambda_2 v_2 - \dots - \lambda_r v_r \right) + \mu_2 v_2 + \dots + \mu_r v_r$
$= -\frac{\mu_1}{\lambda_1} w + \left(\mu_2 - \frac{\mu_1 \lambda_2}{\lambda_1} \right) v_2 + \dots + \left(\mu_r - \frac{\mu_1 \lambda_r}{\lambda_1} \right) v_r$

(ii) Behauptung: $(w, v_2, \dots, v_r)$ ist linear unabhängig.
Seien $\mu, \mu_2, \dots, \mu_r \in K$ mit $\mu w + \mu_2 v_2 + \dots + \mu_r v_r = 0$
$= \mu\lambda_1 v_1 + \mu\lambda_2 v_2 + \dots + \mu\lambda_r v_r + \mu_2 v_2 + \dots + \mu_r v_r$
$= \mu\lambda_1 v_1 + (\mu\lambda_2 + \mu_2) v_2 + \dots + (\mu\lambda_r + \mu_r) v_r$

Da $(v_1, \dots, v_r)$ Basis $\Rightarrow \mu\lambda_1 = \mu\lambda_2 + \mu_2 = \dots = \mu\lambda_r + \mu_r = 0$

Weil $\lambda_1 \neq 0$,folgt: $\mu = 0$. Und damit $\mu\lambda_2 + \mu_2 = \dots = \mu\lambda_r + \mu_r = 0$

Satz 9.2(Basisergänzungssatz) Sei $(v_1, v_2, \dots, v_r)$ eine Basis von V und sei $(w_1, w_2, \dots, w_n)$ eine linear unabhängige Familie in V. Dann gilt $n \leq r$ und es existieren Indizes $i_1, \dots, i_{r-n} \in \{1, \dots, r\}$, so dass $\{w_1, \dots, w_n, v_{i_1}, \dots, v_{i_{r-n}})$ Basis von V ist.

Beweis durch Induktion nach u.
IA: $n = 0$, $i_1 = 1, i_2 = 2, \dots, i_r = r$
IV: Sei $n \geq 1$ und sei $\{w_1, \dots, w_n, v_{i_1}, \dots, v_{i_{r-n}})$ Basis von V.
IS: zeige $u \leq r$
IV: $n - 1 \leq r$, angenommen $n = r + 1$
$\Rightarrow (w_1, \dots, w_{n-1})$ Basis von V, aber $(w_1, \dots, w_n)$
-> Widerspruch zur lin. unabh. von $(w_1, \dots, w_n)$.

Behauptung: es existiert ein $k \in \{1, \dots, r - n + 1\}$ mit
$(w_1, \dots, w_n, v_{i_1}, \dots, v_{i_{k-1}}, v_{i_{k+1}}, \dots, v_{i_{r-n+1}})$
Basis von V.

Nach IV existieren $\lambda_i, \mu_i \in K$ mit

$w_n = \lambda_1 w_1 + ... + \lambda_{n-1} w_{n-1} + \mu_1 v_{i_1} + ... + \mu_{r-n+1} v_{i_{r-n+1}}$

Angenommen $\mu_1 = \mu_2 = ... = \mu_{n+1} = 0$
$\Rightarrow w_n \in \text{lin}(w_1, ..., w_{n-1})$
->Widerspruch zu $(w_1, ..., w_{n-1})$ lin unabh.

Also existieren $k \in \{1, ..., r-n+1\}$: $\mu_k \neq 0$
Die Behauptung folgt aus dem Austauschlemma.

Korollar 9.3 Jede Basis von V ist endlich.
Voraussetzung: V ist endlich erzeugbar.
Beweis: nach Voraussetzung besitzt V eine Basis endlicher Menge, $(v_1, ..., v_r)$ für ein $r \in \mathbb{N}$. Angenommen es existiert eine zweite Basis von V unendlicher Länge.
Daher existiert eine linear unabhängige Teilfamilie aus $r+1$ Vektoren. Dies steht im Widerspruch zum Basisaustauschsatz.

Korollar 9.4 Jede Basis von V hat dieselbe Länge.

Korollar 9.5 Jede linear unabhängige Familie von Vektoren aus V lässt sich zu einer Basis fortsetzen.

10. Der Dimensionsbegriff

Definition 10.1 Ist V ein K-VR so bezeichnet
$$\dim_K V = \begin{cases} r, & \text{falls } V \text{ eine Basis der Länge } r \text{ besitzt} \\ \infty, & \text{sonst} \end{cases}$$
die Dimension von V über K.

Beispiel 10.2 (i) $\dim_K K^n = n$, für $n \geq 1$
(ii) $\dim_K \{0\} = 0$, da $K^0 := \{0\}$
(iii) $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$, $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$

(iv) $\dim_{\mathbb{Q}}\mathbb{R} = \infty$

Proposition 10.3 Sei V ein K-VR mit $\dim_K V < \infty$ und $U < V$ echter Teilraum. Dann $\dim_K U < \dim_K V$

Beweis: Sei $(u_1, \dots, u_k)$ Basis von U, und $(v_1, \dots, v_n)$
Basis von V.
Da $U \subsetneqq V$ existieren $v \in V \setminus U$ und $v \notin \mathrm{lin}_K(v_1, \dots, v_k)$.
Au Propostion 2.9 folgt $(u_1, \dots, u_k, v)$ linear unabhängig
über $K \underset{\text{Kor.9.5}}{\Rightarrow} k + 1 \leq n \Rightarrow k < n$ $\square$

11. Exkurs: Matroide

Definition 11.1 Sei E eine endliche Menge und $\mathfrak{B} \subseteq \binom{E}{r}$ die Menge aller r-elementigen Teilmengen von E.
Das Paar (E, B) heißt Matroid, falls für je zwei verschiedene $A, B \in \mathfrak{B}$ gilt, dass für jedes $a \in A$, ein $b \in B$ existiert, sodass $(A \setminus \{a\}) \cup \{b\} \in \mathfrak{B}$. a muss nicht notwendigerweise von b verschieden sein.

Definition 11.2 Sei $\mathfrak{M} = (E, \mathfrak{B})$ Matroid.
•Die Elemente aus $\mathfrak{B}$ heißen Basis von $\mathfrak{M}$.
•Eine Teilmenge X von E, heißt unabhängig, falls es eine Basis $B \in \mathfrak{B}$ von X gibt.
•Ein Element aus E heißt Schleife, falls es in keiner Basis vorkommt.
•Eine abhängige Teilmenge $C \subset E$ heißt Kreis, falls ein $x \in C$ existiert, sodass $C \setminus \{x\}$ unabhängig ist.

Beispiel 11.3 Sei E eine beliebige endliche Menge.
Dann ist $(E, \{\{x\} \mid x \in E\})$ Matroid.

Beispiel 11.4 Sei $E = \{1,2,3,4,5\}$ und
$\mathfrak{B} = \{\{1,2,3\},\{1,2,5\},\{1,3,4\},\{1,3,5\},\{1,4,5\}$
$\{2,3,4\},\{2,3,5\},\{2,4,5\},\{3,4,5\}\}$ ({1,2,4} fehlt bewusst)
Dann ist $(E, \mathfrak{B})$ ein Matroid.

$A = \{1,3,5\},\ B = \{2,4,5\}$
$a = 3, b = 4$
$A \setminus \{a\} = \{1,5\}$
$A \setminus \{a\} \cup \{b\} = \{1,4,5\} \in \mathfrak{B}$

Proposition 11.5
Sei $(E, \mathfrak{B})$ Maroid. Dann haben je zwei Basen die selbe Länge.

Matroide aus Vektorräumen

Es sei $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ eine endliche Familie eines K-VR V.
Wir setzen $E_i := \{1,2,\dots,n\}$ und $\mathfrak{B} := \{\mathfrak{B} \subseteq E \mid \{v_i \mid i \in \mathfrak{B}\}$ linear unabhängig über K und $\mathrm{lin}_K(v_i \mid i \in \mathfrak{B}) = V\}$.

Satz 11.6 $(E, \mathfrak{B})$ ist Matroid.
Beweis über Basisaustauschsatz für V.

Beispiel 11.7 Betrachte den $\mathbb{Q}$-VR $\mathbb{Q}^3$ und die Vektoren

$$\text{(i)} \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \text{(ii)} \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \text{(iii)} \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \text{(iv)} \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, (v) \begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix}$$

$$e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \quad [\text{(i)}], e_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \quad [\text{(ii)} - \text{(i)}]$$

$$e_3 = \tfrac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) \quad \left[\tfrac{1}{2}\text{(iii)} - \text{(i)}\right]$$

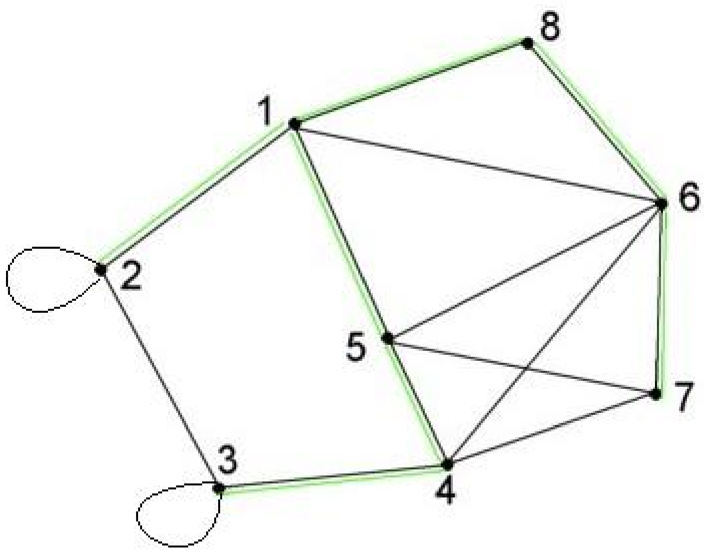
Matroide aus Graphen

Definition 11.8 Das Paar (V, E) heißt (unendlicher) Graph, falls V eine endliche Menge und $E \subseteq \underset{\text{ein oder zwei Elementig}}{\{\{x, y\} \mid x, y \in V\}}$

Die Elemente aus V heißen Knoten, die Elemmente aus E Kanten.($\leftrightarrow$symmetrische Relation auf V)

Beispiel 11.9 $(V, \varnothing)$ Graph
$\left(V, \binom{V}{2}\right)$ Graph

$V = \{1, 2, \dots, 8\}$
Sei $\lceil = (V, E)$ ein endlicher Graph.



Hier sind:
$E = \{\{1, 2\}, \{1, 5\}, \{1, 8\}, \{2, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}, \{4, 6\}$
$\{4, 7\}, \{5, 6\}, \{5, 7\}, \{6, 7\}, \{6, 8\}\}$(symmetrisch)
$B :=$ {Teilmenge von Kanten in E, die zu einem aufspannenden Baum von $\lceil$ gehören} (grün)
$B = \{\{1, 2\}, \{1, 5\}, \{1, 8\}, \{5, 4\}, \{4, 3\}, \{8, 6\}, \{6, 7\}\}$

Satz 11.10 (E, B) ist Matroid.

Kapitel 3 Lineare Abbildungen

1. Definitionen und erstes Beispiel

Seien V,W Vektorräume über dem selben Körper K.

Definition 1.1 Eine Abbildung $f : V \to W$ heißt <u>linear</u> über K, falls
$\forall u, v \in V, \forall \lambda, \mu \in K : f(\lambda u + \mu V) = \lambda f(u) + \mu f(v)$

Definition 1.2 Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung.
(i) Die Menge $\mathrm{img}(f) := \{f(v) \mid v \in V\} = f(V)$ heißt Bild von f
(ii) Die Menge $\ker(f) := \{v \in V \mid f(v) = 0\}$ heißt Kern von f

Übungsaufgaben:
(i) $\mathrm{img}(f) \leq W$
(ii) $\ker(f) \leq V$
$0_V \in V,\ f(0_V) = f(0 \cdot \underset{=0_W}{0_V} + 0 \cdot 0_V) = 0 \cdot f(0_V) + 0 \cdot f(0_V)$
$\Rightarrow 0_V \in \ker(f)\ \wedge\ 0_W \in \mathrm{img}(f)$

Beispiel 1.3 Sei V beliebig und $v_1, v_2, ..., v_n \in V$

Dann ist die Abbildung $f : K^n \to V : x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i v_i$ linear.

Seien $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in K^n, \lambda, \mu \in K$.

$f(\lambda x + \mu y) = \begin{pmatrix} \lambda x_1 + & \mu y_1 \\ \vdots & \vdots \\ \lambda x_n + & \mu y_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} (\lambda x_i + \mu y_i) v_i =$

$\lambda \sum_{i=1}^{n} (x_i v_i) + \mu \sum_{i=1}^{n} (y_i v_i) = \lambda f(x) + \mu f(y)$

Es gilt: $\mathrm{img}(f) = \text{lineare } H\text{ülle} = \mathrm{lin}_K(v_1, ..., v_n)$
und $\ker(f) = \{x \in K \mid x_1 v_1 + ... + x_n v_n\}$

Hieraus folgt sofort $\ker(f) = \{0\} \iff (v_1, ..., v_n)$ linear unabhängig.

Proposition 1.4
Eine lineare Abbildung $f : V \to W$ ist injektiv, genau dann wenn (im weitern g.d.w.) $\ker(f) = \{0\}$.
Außerdem gilt: $\forall u, v \in V : f(u) = f(v) \iff u - v \in \ker(f)$

<u>Beweis:</u> seien $u, v \in V$. Dann gilt:
$0 = f(u) - f(v) = f(u - v) \iff u - v \in \ker(f)$

Sei nun f injektiv und $x \in \ker(f)$.
$\Rightarrow f(x) = 0 \wedge f(0) = 0 \Rightarrow x = 0$

Sei umgekehrt $\ker(f) = \{0\}$. Seien $u, v \in V$ mit $f(u) = f(v)$
$\Rightarrow f(u) - f(v) = 0 \Rightarrow u - v \in \ker(f) = \{0\} \Rightarrow u - v = 0$
$\square$

2. Dimensionsformel und Rang

Für das Folgende erweitere ich die Addition der natürlichen Zahlen auf $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$.
$\forall n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\} : n + \infty := \infty =: \infty + n$

Satz 2.1[Dimensionsformel] Seien V,W K-Vektorräume.
Sei $f : V \to W$ linear. Dann gilt:
$\dim_K \ker(f) + \dim_K \mathrm{img}(f) = \dim(V)$
$\mathbb{J}$
<u>Beweis:</u> Falls $\dim(V) = \infty$ ist $\dim_K \ker(f)$ oder $\dim_K \mathrm{img}(f)$ oder beide $= \infty$.
Wir betrachten den Fall, $m := \dim_K \ker(f) < \infty$ und $n := \dim_K \mathrm{img}(f) < \infty$. Zu zeigen ist: $\dim(V) = m + n$.
Nach Voraussetzung existiert eine Basis der Länge m $(v_1, \dots, v_m)$ von $\ker(f)$.
Sowie eine Basis $(w_1, \dots, w_n)$ von $\mathrm{img}(f)$.

Für jedes $j \in \{1, \dots, n\}$ existiert ein $v_{m+j} \in V$ mit
$f(v_{m+j}) = w_j$.
Zu zeigen ist nun: $(v_1, \dots, v_{m+n})$ ist eine Basis von V.
(denn $\Rightarrow \dim(V) = m + n$)

Zunächst Behauptung: $\text{lin}_K(v_1, \dots, v_{m+n}) = V$.
Sei $v \in V$. Dann existieren $\mu_1, \dots, \mu_n \in K$ mit
$f(v) = \mu_1 w_1 + \dots + \mu_n w_n. = \mu_1 f(v_{m+1}) + \dots + \mu_n f(v_{m+n})$
$\overset{f \text{ linear}}{=} f(\mu_1 v_{m+1} + \dots + \mu_n v_{m+n})$

Behauptung: $(v_1, \dots, v_{m+n})$ linear unabhängig.
Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_{m+n} \in K$ mit $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{m+n} v_{m+n} = 0 \qquad (*)$
$\overset{f \text{ lin.}}{\Rightarrow} 0 = f(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{m+n} v_{m+n}) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \underbrace{f(v_i)}_{=0} + \sum_{i=m+1}^{m+n} \lambda_i \underbrace{f(v_i)}_{=w_{i-m}}$

$= \lambda_{m+1} w_1 + \dots + \lambda_{m+n} w_n$
$\overset{w_i \text{lin unabh.}}{\Rightarrow} \lambda_{m+1} = \dots = \lambda_{m+n} = 0$
$\overset{(\star)}{\Rightarrow} \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m = 0$
$\overset{v_i \text{lin unabh.}}{\Rightarrow} \lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0$
□

Satz 2.2 Sei $f : V \to V$ linear und $\dim(V) < \infty$.
Dann sind Äquivalent:
(i) f ist injektiv
(ii) f ist surjektiv
(iii) f ist bijektiv

Beweis: f inj $\iff \ker(f) = \{0\} \iff \dim_K \ker(f) = 0$
$\iff \dim_K \text{img}(f) = n \iff \text{img}(f) = V \iff f$ bij. $\iff f$ surj.

Bemerkung 2.3 Gilt nicht für $\dim(V) = \infty$.

Definition 2.4 Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Die Zahl

$\text{rank}(f) := \dim_K \text{img}(f)$.
Falls $\dim(V) < \infty$ ist der Rang die dim vom Bild von f.
$\text{rank}(f) = \dim_K(V) - \dim_K \ker(f)$

Beispiel 2.5 $f : K^n \to K^n$ lineare Abbildung, $v_1, \dots, v_n \in K^n$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i v_i$$

f bij. $\iff$ f inj. $\iff$ $\ker(f) = \{0\}$ $\iff$ $\{v_1, \dots, v_n\}$ lin. unabh. $\iff$ $\{v_1, \dots, v_n\}$ ist Basis von K^n

3. Hauptsatz über lineare Abbildungen

Proposition 3.1
Seien V, W bedes K-VR. Sei $\{v_1, \dots, v_n\} \in V$ eine Basis von V und $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann gilt:
(i) $\text{lin}_K(\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}) = \text{img}(f)$
(ii) $\text{rank}(f)$ ist die maximale Länge einer linear unabhängigen Teilfamilie $\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$
(iii) f ist surjektiv $\iff$ $\text{rank}(f) = \dim_K(W)$
(iv) f injektiv $\iff$ $\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ linear unabhängig
(v) f bijektiv $\iff$ $\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ ist Basis von W

<u>Beweis:</u> zu (i) Sei $L = \text{lin}_K(\{f(v_1), \dots, f(v_n)\})$.
zz: $L \overset{A}{\subseteq} \text{img}(f)$ und $\text{img}(f) \overset{B}{\subseteq} L$
(A) Sei $w \in L$, d.h. es existieren $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$, mit

$$w = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(v_i) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i\right)$$

$\Rightarrow \forall w \in L \Rightarrow w \in \text{img}(f)$, *d.h.* $L \subseteq \text{img}(f)$
(B) Sei $w \in \text{img}(f)$, *d.h.* $\exists v \in V$ mit $f(v) = w$. Da $v_1, \dots, v_n$ eine Basis von V ist, existieren $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ mit $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$.
Damit gilt $w = f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(v_i) \in L$ $\square$

zu (iii)
"$\Rightarrow$" : f surjektiv $\Rightarrow \mathrm{img}(f) = W \Rightarrow \mathrm{rank}(f) = \dim_K \mathrm{img}(f) = \dim_K(W)$
"$\Leftarrow$" : $\mathrm{rank}(f) = \dim_K(W) = \dim_K \mathrm{img}(f)$ Da $\mathrm{img}(f) \leq W$ ein Unterraum von W ist folgt, dass $\mathrm{img}(f) = W$ ist und damit f surjektiv.
[$\mathrm{img}(f)$ ist ein Unterraum, da $f(v_1)$ und $f(v_2) \in \mathrm{img}(f)$ und $\lambda\mu \in K$ folgt: $\lambda f(v_1) + \mu f(v_2) = f(\lambda v_1 + \mu v_2) \in \mathrm{img}(f)$]

zu (iv)"$\Rightarrow$"f sei injektiv $\overset{\text{Prop1.4}}{\Longleftrightarrow} \ker(f) = \{0\} \iff \dim_K \ker(f) = 0$
$\overset{\text{Prop 2.1}}{\Rightarrow} \dim_K \mathrm{img}(f) = \dim_K(V) \Rightarrow \{f(v_1), ..., f(v_2)\}$ lin. unabh.
"$\Leftarrow$"$\{f(v_1), \dots, f(v_2)\}$ lin. unabh.
$\Rightarrow \dim_K \mathrm{img}(f) = n \Rightarrow \dim_K \ker(f) = \dim_K(V) - \dim_K \mathrm{img}(f) = 0$
$\Rightarrow f$ injektiv.

zu (v) folgt aus (iii) und (iv).

Satz 3.2(Hauptsatz über lineare Abbildungen)

Sei $\{v_1, \dots, v_n\} \in V$ eine Basis von V und $\{w_1, \dots, w_n\} \in W$ beliebig. Dann existiert genau eine lineare Abbildung $f : V \longrightarrow W$ mit der Eigenschaft, $f(v_i) = w_i \, \forall i = 1, ..., n$.

<u>Beweis:</u>
Sei $v \in V$. Da $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von V bilden, existiert nach Satz 2.6.6 eine eindeutige Darstellung von V als Linearkombination den v_i : $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$, mit $\lambda_i \in K \forall i = 1, \dots, n$
Definiere nun: $f(v) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i w_i$
Da nun $v_j = 0v_i + \dots + 0v_{j-1} + 1v_j + 0v_{j+1} + \dots + 0v_n$
folgt $f(v_j) = w_j \forall j 1, \dots, n$. f ist linear.
Sei $g : V \longrightarrow W$ linear mit $g(v_i) = w_i, \forall i = 1, \dots, n$.
Es gilt: $g(v) = g\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g(v_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i w_i = f(v)$
also ist f eindeutig.

Sei V ein K-VR mit $\dim_K(V) = n < \infty$ und $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis

von V und $\{e_1, \dots, e_n\}$ die Standardbasis von K^n. Nach Satz 3.2 gibt es eine eindeutige lineare Abbildung $f : K^n \to V$ mit $f(e_i) = v_i \forall i = 1, \dots, n$.
Nach Proposition 3.1(v) ist f bijektiv.

Definition 3.3
Eine bijektive K-lineare Abbildung(lineare Abbildung zwischen K-VR) heißt *K-Vektorraum-Isomorphismus.* Zwei Vektorräume V und W heißen isomorph, falls so ein K-VR Isomorphismus zwischen V und W existiert.
Geschrieben: $V \cong W$

Bemerkung 3.4 Sei $f : V \to W$ ein Isomorphismus, so ist die Umkehrabbildung ebenfalls ein Isomorphismus, d.h. bijektiv und linear.
($\Rightarrow$Satz 3.2)

Korollar 3.5
Sei V ein K-VR mit $\dim_K(V) = n < \infty$. Dann ist V isomoprh zu K^n.

Beispiel 3.6 Der K-VR der Polynome von maximalem Grad d $K[t]_d$ ist isomorph zu K^{d+1}da $\{1, t, t^2, \dots, t^d\}$ eine Basis von $K[t]_d$ und die Abbildung $f : K^{d+1} \to K[t]_d, e_i \mapsto t^{i-1}$ für $i = 1, \dots, d + 1$ ein K-VR isomorphismus ist.

4. Matrizen

Definition 4.1 Sei X eine Menge und $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$
Eine $m \times n$ Matrix M mit Koeffizienten in X ist eine Abbildung
$M : \{1, 2, \dots, m\} \times \{1, 2, \dots, n\} \to X$

Übliche Notation als rechteckiges Schema:

$$M = \begin{array}{cl} \begin{array}{cccc} \scriptstyle 1.\text{Spalte} & \scriptstyle 2.\text{Spalte} & \scriptstyle \cdots & \scriptstyle n-\text{te Spalte} \end{array} & \\ \begin{pmatrix} M(1,1) & M(1,2) & \cdots & M(1,n) \\ M(2,1) & M(2,2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M(m,1) & M(m,2) & \cdots & M(m,n) \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow 1.\text{ Zeile} \\ \leftarrow 2.\text{ Zeile} \\ \quad\vdots \\ \leftarrow m - \text{te Zeile} \end{array} \end{array}$$

Bemerkung 4.2 K^n(für Körper K) ist definiert als die Menge aller n-Tupel, kann identifiziert werden mit der Menge $K^{\{1,\dots,m\}}$ und weiter mit $K^{\{1,\dots,n\}\times\{1\}}$ ($\to$ Spaltenvektor)
und analog Zeilenvektoren $K^{\{1,\dots,m\}\times\{1\}}$(Matrizen mit genau einer Zeile)

$X^{m\times n} := X^{\{1,\dots,m\}\times\{1,\dots,n\}}$ ist die Menge aller Matrizen in X

Seien V, W K-VR mit $\dim_K(V) < \infty$ und $\dim_K(W) < \infty$.
Sei fener $f : V \to W$ linear und $B = (v_1, \dots, v_m)$ Basis von V
und $C = (w_1, \dots, w_n)$ Basis von W.

Für jedes $i \in \{1, \dots, m\}$ existieren $\mu_{i_1}, \dots, \mu_{i_n} \in K$ mit
$f(v_i) = \mu_{i_1} w_1 + \dots + \mu_{i_n} w_n$

Definition 4.3
Die Matrix $[f]_B^C : \{1, .., m\} \times \{1, .., n\} \to K : (i, j) \mapsto \mu_{ij}$
heißt darstellende Matrix von f bezüglich B und C.

5. Vektorräume über linearen Abbildungen

Seien V, W K-VR. Dann ist W^V mit der punktweisen Addition und punktweiser Skalarmultiplikation wieder ein K-VR.

Definition 5.1 (i) $\mathrm{Hom}_K(V, W) := \{f : V \to W \mid f \text{ linear}\}$
statt K-linearer Abbildung nun K-VR Homomorphismus
(ii) $\mathrm{End}_K(V, V) := \mathrm{Hom}_K(V, V)$

Proposition 5.2 $\mathrm{Hom}_K(V, W)$ ist ein K-UVR von W^V.

Proposition 5.3 Seien U, V, W K-VR. Es gilt:
(i) Die Identität $\mathrm{id}_V : V \to V : x \mapsto x$ ist linear.
(ii) Ist $\phi : V \to W$ linear$\wedge$bijektiv, dann ist auch $\phi : W \to V$ linear.
(iii) Sind $\phi : U \to V, \psi : V \to W$ linear, dann auch $\phi \circ \psi : U \to W$

<u>Beweis:</u> (ii) Sei $\phi : V \to W$ linear und bijektiv. Seien $w_1, w_2 \in W$ und $\lambda_1, \lambda_2 \in K$. Setze $v_1 := \phi^{-1}(w_1) \wedge v_2 := \phi^{-1}(w_2)$
$\Rightarrow \phi^{-1}(\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2) = \phi^{-1}(\lambda_1 \phi(v_1) + \lambda_2 \phi(v_2))$
$= \phi^{-1}(\phi(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2)) = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$
$= \lambda_1 \phi^{-1}(w_1) + \lambda_2 \phi^{-1}(w_2)$.
(i)+(iii) UA

Proposition 5.4
Seien $\phi_1, \phi_2 : U \to V$ sowie $\psi_1, \psi_2 : V \to W$ linear.

$$\text{Dann}: \left.\begin{array}{l} (i)\ \psi_1 \circ (\phi_1 + \phi_2) = \psi_1 \circ \phi_1 + \psi_1 \circ \phi_2 \\ (\text{ii})(\psi_1 + \psi_2) \circ \phi_1 = \psi_1 \circ \phi_1 + \psi_2 \circ \phi_1 \end{array}\right] \text{Distributivgesetze}$$
$$(\text{iii})(\lambda \psi_1) \circ \phi_1 = \lambda(\psi_1 \circ \phi_1) = \psi_1(\lambda \phi_1),\ \lambda \in K$$

<u>Beweis:</u> (i) Sei $u \in U$.
$[\psi_1 \circ (\phi_1 + \phi_2)](u) = \psi_1([\phi_1 + \phi_2](u)) = \psi_1 \circ (\phi_1(u) + \phi_2(u))$

$= \psi_1 \circ \phi_1(u) + \psi_1 \circ \phi_2(u) = [\psi_1 \circ \phi_1](u) + [\psi_1 \circ \phi_2](u)$
$= [\psi_1 \circ \phi_1 + \psi_1 \circ \phi_2](u)$
(ii) folgt aus (i)
(iii) Übung

Satz 5.5
$(\mathrm{End}_K(V), +, \cdot)$ ist ein Ring mit dem Einselement id_V

Beweis: $\bullet(\mathrm{End}_K(V), +)$ ist abelsche Gruppe, weil V Vektorraum
$\bullet(\mathrm{End}_K(V), \cdot)$ ist Halbgruppe, weil Verkettungen beliebiger Funktionen assoziativ sind.
- Einselement $\mathrm{id}_V \circ \phi = \phi = \phi \circ \mathrm{id}_V$
- Distributivgesetze siehe Proposition 5.4

Bemerkung 5.6 Da $\mathrm{End}_K(V)$ ein K-VR ist und Proposition 5.4(iii) gilt ist $(\mathrm{End}_K(V), +, \cdot, \circ)$ eine *K-Algebra*

6. Die allgemeine lineare Gruppe

Definition 6.1 $\mathrm{GL}_K(V) := \{\phi \in \mathrm{End}_K(V, V) \mid \phi \,\text{bijektiv}\}$, $V - \text{KVR}$

Bemerkung 6.2 $(\mathrm{GL}_K(V), \circ)$ ist eine Gruppe.
Beweis: seinen $\phi, \psi \in \mathrm{GL}_K(V)$
$\Rightarrow \phi \circ \psi : V \to V$ ist linear und bijektiv
- $\circ$ ist assoziativ
- id_V ist das Neutralelement bzgl. $\circ$
- $\phi \in \mathrm{GL}_K(V)$ ist bijektiv, ϕ^{-1} existiert

ϕ^{-1} ist eine lineare Abbilsung von $V \to V$, linear und bijektiv

Beispiel 6.3 Sei $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ und $V = \mathbb{F}_2^2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Die Vektoren $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ bilden eine Basis von V.

Bzgl. dieser Basis lassen sich die Elemente von $\mathrm{End}_{\mathbb{F}_2}(\mathbb{F}_2^2)$
als 2×2 Matrizen schreiben:

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ Matrix der Nullabbildung, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Die Folgenden Matrizen gehören u Elementen von $\mathrm{GL}_{\mathbb{F}_2}(\mathbb{F}_2^2)$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

7. Vektorräume über Matrizen

Sei K ein beliebiger Körper.

Definition 7.1 Seien $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Dann ist
$K^{\{1,\dots,m\} \times \{1,\dots,n\}} =: K^{m \times n}$

Die Menge aller $m \times n$ Matrizen über K.

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} =: (\alpha_{\mathrm{ij}})_{i,j}; i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m$$

Proposition 7.2 $K^{m \times n}$ mit Komponentenweiser Addition und Skalarmultiplikation ist ein K-VR der Dimension $m \cdot n$.

<u>Beweis:</u> Komponentenweise Addition:
$(\alpha_{\mathrm{ij}})_{i,j} + (\beta_{\mathrm{ij}})_{i,j} := (\alpha_{\mathrm{ij}} + \beta_{\mathrm{ij}})_{\hat{\imath},j}$
entsprechend: $\lambda \cdot (\alpha_{\mathrm{ij}})_{i,j} := (\lambda \cdot \alpha_{\mathrm{ij}})_{i,j}$

indenifiziere Matrix $\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \vdots \\ \alpha_{m1} \\ \alpha_{12} \\ \vdots \\ \alpha_{mn} \end{pmatrix}$

Matrixmultiplikation

Wir definieren eine weitere Verknüpfung. Seien $(\alpha_{\mathrm{ij}})_{i,j} \in K^{l\times m}$ und $(\beta_{\mathrm{ij}})_{i,j} \in K^{m\times n}$ für $l, m, n \geq 1$. Dann ist

$$\left(\sum_{j=1}^{m} \alpha_{\mathrm{ij}} \cdot \beta_{\mathrm{jk}}\right)_{\mathrm{ik}} = (\alpha_{\mathrm{ij}})_{i,j} \cdot (\beta_{\mathrm{ij}})_{i,j}$$

die <u>*Produktmatrix*</u> von $(\alpha_{\mathrm{ij}})_{i,j}$ und $(\beta_{\mathrm{ij}})_{i,j}$. Die Abbildung $\bullet : K^{l\times m} \times K^{m\times n} \to K^{l\times n}$ heißt Matrixmultiplikation.

Proposition 7.3 Die Matrixmultiplikation ist assoziativ.
Beweis Übung [aber nur für $m = n = l = 1$ kommutativ!!!]

Beispiel 7.4 $K = \mathbb{Q}, l = 2, m = 3, n = 2$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & 2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Beispiel 7.5 $K = \mathbb{F}_2$ und $l = m = n = 2$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1+1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Proposition 7.6 [analog zu Prop 5.4]
Seien $A_1, A_2 \in K^{l\times m}, B_1, B_2 \in K^{m\times n}, \lambda \in K$. Dann:
(i) $A_1(B_1 + B_2) = A_1B_1 + A_1B_2$
(ii) $(A_1 + A_2)B_1 = A_1B_1 + A_2B_1$
(iii) $(\lambda A_1)B_1 = \lambda(A_1B_1) = A_1(\lambda B_1)$

<u>Beweis:</u> (ii): Seien $A_1 = \left(\alpha_{\mathrm{ij}}^{(1)}\right)_{i,j}, A_2 = \left(\alpha_{\mathrm{ij}}^{(2)}\right)_{\mathrm{ij}}$,
$B_1 = (\beta_{\mathrm{jk}})_{j,k}$ und $(A_1 + A_2)B_1 = (\gamma_{\mathrm{ik}})_{i,k}$

$$\Rightarrow \gamma_{\mathrm{ij}} = \sum_{j=1}^{m} \left(\alpha_{\mathrm{ij}}^{(1)} + \alpha_{\mathrm{ij}}^{(2)}\right) \beta_{\mathrm{jk}} = \sum_{j=1}^{m} \left(\alpha_{\mathrm{ij}}^{(1)} \beta_{\mathrm{jk}}\right) + \sum_{j=1}^{m} \left(\alpha_{\mathrm{ij}}^{(2)} \beta_{\mathrm{jk}}\right)$$

ferner ist $A_1B_1 = \sum_{j=1}^{m}\left(\alpha_{\text{ij}}^{(1)}\beta_{\text{jk}}\right)$ und $A_2B_1 = \sum_{j=1}^{m}\left(\alpha_{\text{ij}}^{(2)}\beta_{\text{jk}}\right)$

Die Algebra der n×n Matrizen über K

Die Matrix $E_n := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in K^{n\times n}$ heißt n-reihige *Einheitsmatrix* über K.

Eine Matrix $A \in K^{n\times n}$ heißt invertierbar, falls $\exists B \in K^{n\times n}$ mit $AB = E_n$[dann folgt $\underset{\text{aber nicht allgemein!}}{\text{BA} = E_n}$]

Wegen $E_n \cdot E_n = E_n$ ist E_n invertierbar.

Definition 7.7 $\text{GL}_n K := \{A \in K^{n\times n} |\, A \text{ invertierbar}\} \subseteq K^{n\times n}$

Proposition 7.8 $(\text{GL}_n(K), \cdot)$ ist eine Gruppe.

Beweis: $\text{GL}_n K \neq \varnothing$, da $E_n \in \text{GL}_n K$, " $\cdot$ "ist assoziativ

$$\forall \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \in K^{n\times n} : \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

-> Wir haben nur invertierbare Matrizen in der Menge, folglich hat jede mindestens ein Element.

Beispiel 7.9 $n = 1, \text{GL}_1 K = \{(a) \mid a \in K \setminus \{0\}\}, E_1 = (1)$

$(a) \cdot (b) = (a \cdot b)$

$\text{GL}_1 K$ ist als Gruppe isomorph zur multiplikativen Gruppe der Körpers K.

Beispiel 7.10

$$\text{GL}_2\mathbb{F}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Proposition 7.11 Diagonalmatrizen sind genau dann invertierbar, wenn alle Diagonaleinträge $\neq 0$ sind.
-> Beweis klar

Neue Notation für Diagonalmatrizen.

$$\delta(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) := \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}$$

$$\delta(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \cdot \delta(\beta_1, \dots, \beta_n) = \delta(\alpha_1\beta_1, \dots, \alpha_n\beta_n)$$

$$\operatorname{diag}(\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n) := \begin{pmatrix} \delta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_2 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots \end{pmatrix}$$

Proposition 7.12 $\operatorname{diag}(\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n) \times \operatorname{diag}(\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n)$
$= \operatorname{diag}(\delta_1\mu_1, \delta_2\mu_2, ..., \delta_n\mu_n)$

Insbesondere ist die Einheitsmatrix eine Diagonalmatrix.
Diagonalmatrizen sind genau dann invertierbar, wen alle E$\neq 0$.
$\delta_1 \neq 0, ..., \delta_n \neq 0$

Analog zu 5.5 gilt:

Satz 7.13 Das Tripel $(K^{n\times n}, +, \times)$ ist ein Ring mit dem Einselement E_n

Bem 7.14 $K^{n\times n}$ ist wegen Prop 7.6(iii) eine K Algebra, ihre Einheitengruppe ist $\mathrm{GL}_n(K)$=Menge der Elemente die ein multiplikatives inverses haben.

Ergänzung: Summen von Vektorräumen

Sei V ein K-VR und $U \leq V, W \leq V$ zwei Untervektorräumev von V.
Dann ist die Summe $U + W \leq V$ gegeben durch:
$U + W = \{u + w \mid u \in U,\ w \in W\}$.
Diese Summe heißt direkt, falls $U \cap W = \{0\}$.

Satz Falls $\dim(V) < \infty$:
$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$

Beweis: Sei $\{v_1, \dots, v_s\} \subset U \cap W$ eine Basis von $U \cap W$.
Ergänze diese Basen zu $B_U = \{v_1, \dots, v_s, u_1, \dots, u_m\}$ von U
und $B_W = \{v_1, \dots, v_s, w_1, \dots, w_n\}$ von W.
Behauptung: $B = \{v_1, \dots, v_s, u_1, \dots, u_m, w_1, \dots, w_n\}$ ist eine
Basis von $U + W$, d.h. (i) $U + W = \text{lin}(B)$
(ii) B ist linear unabhängig

zu (i) sei $v = u + w \in U + W$. Dann ist $u \in \text{lin}(B_U)$ und
$w \in \text{lin}(B_W)$, also ist $\text{lin}(B_U \cup B_W) = \text{lin}(B)$.
Umgekehrt gilt $\text{lin}(B) \subseteq U + W$ ist.Somit ist $\text{lin}(B) = U + W$.

zu (ii) Seien $\lambda_i, \mu_j, \mu_k \in K$ mit
$$\underbrace{\sum_{i=1}^{s} \lambda_i v_i}_{U \cap W} + \sum_{j=1}^{m} \mu_j u_j + \sum_{k=1}^{n} \mu_k w_k = 0$$

Setze $v = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i v_i + \sum_{j=1}^{m} \mu_j u_j \in U$
$= -\sum_{k=1}^{n} \mu_k w_k \in W$

Also ist $v \in U \cap W$ und besitzt damit eine eindeutige Darstellung
bezüglich derBasis $v_1, \dots, v_s$. Folglich gilt $\mu_j = 0 \forall j = 1, \dots, m$
und $\mu_k = 0 \; \forall k = 1, \dots, n$. Daraus folgt: $\sum_{i=1}^{s} \lambda_i v_i = 0$.
Dann gilt auch $\lambda_i = 0 \; \forall i = 1, \dots, s$. Also ist B eine Basis.
Nun gilt $\dim_K(U + W) = s + m + n = (s + m) + (s + n) - s$
$= \dim_K(U) + \dim_K(W) - \dim_K(U \cap W)$
$\square$

8. Lineare Abbildungen aus Matrizen

Sei K ein Körper, $A = (\alpha_{ij})_{i,j} \in K^{m\times n}$ und $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n = K^{n\times 1}$

Spezialisierung der Matrixmultiplikation:

$$A_x = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11}x_1 & \alpha_{12}x_2 & \cdots & \alpha_{1n}x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1}x_1 & \alpha_{m2}x_2 & \cdots & \alpha_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

Bemerkung 8.1 Das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{llll} \alpha_{11}x_1 & +\cdots+ & \alpha_{1n}x_n & = \beta_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & = \vdots \\ \alpha_{m1}x_1 & +\cdots+ & \alpha_{mn}x_n & = \beta_n \end{array}$$

lässt sich schreiben als $Ax = b$ [Schreibweise $(A \mid b)$] mit

$$A = (\alpha_{ij})_{i,j} \in K^{m\times n}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in K^m$$

und $(A \mid b) := \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} & \beta_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{\text{mn}} & \beta_n \end{pmatrix}}_{=\text{erweiterte Koeffizentenmatrix}}$

Lemma 8.2 Die Abbildung $\phi_A : K^n \to K^m : x \mapsto Ax$ ist linear.

<u>Beweis:</u> Seien $\lambda, \mu \in K,\ x, y \in K^n,\ A \in K^{m\times n}$

$\phi_A(\lambda x + \mu y) = A(\lambda x + \mu y) = A(\lambda x) + A(\mu y)$

$= \lambda(Ax) + \mu(Ay) = \lambda\phi_A(x) + \mu\phi_A(y)$

$\square$

Lemma 8.3 $\phi_A(e_i) = Ae_i = \begin{pmatrix} \alpha_{1i} \\ \vdots \\ \alpha_{mi} \end{pmatrix} = i -$ te Spalte von A

Hieraus folgt: $\text{img}(\phi_A) = \phi_A(K^n) = \{b \in K^m \mid \exists x \in K^n : Ax = b\}$

$= \text{lin}_K(\phi_A(e_1), \ldots, \phi_A(e_n))$

$=$ Unterraum von K^m aufgespannt von Spalten von A

$=:$ Spaltenraum von A

Der Rang einer Matrix

Definition 8.4 Der Rang einer Matrix A ist definiert als,
$\text{rank}_K A := \text{rank}_K \phi_A = \dim_K \text{img}\, \phi_A =$ Dim. des Spaltenraums

Beispiel 8.5 Betrachte $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_3^{3\times 3}$
Wende Gauß-Jordan-Elimination auf das LGS $Ax = 0$ an.
Wir erhalten eine 3×3 matrix in Zeilenstufenform:
$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $- >$ Spalte 1, 2 sind lin. unabh. Vektoren
$->$dim Spaltenraum $= 2$

Der Rang der Zeilenstufenform von B ist 2.
Der Rang der Matrix B ist 2.
Der Rang der Matrix A ist 2.

Satz 8.6 Der Rang einer Matrix $A \in K^{m\times n}$ ist genau der Rang einer Zeilenstufenform eines LGS $Ax = b$ für $b \in K$ beliebig.

Beweis: Klar, dass es auf die rechte Seite b nicht ankommt.
Wir zeigen, dass die elementaren Zeilenoperationen
(E1),(E2),(E3) den Rang der Koeffizientenmatrix nicht ändern.

(E1) Addiere zur i-ten Zeile, das λ-fache der Zeile j. $\lambda \in K, i \neq j$

Dann ist die transformierte Matrix $A' = L \cdot A$,wobei
$L := E_m + \lambda E_{i,j}$ und $E_{ij} = (\mu_{kl})_{k,l}$ mit $\mu_{kl} = \begin{cases} 1 \text{ falls } (i,j) = (k,l) \\ 0 \qquad \text{sonst} \end{cases}$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \lambda \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \vdots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \lambda \text{ befindet sich in der } j-\text{ten Spalte in der } i-\text{ten Zeile}$$

Wegen $i \neq j$ gilt$(E_{i,j})^2 = 0$
$\Rightarrow (E_m + \lambda E_{ij}) \cdot (E_m - \lambda E_{ij}) = E_m^2 - \lambda^2 E_{ij}^2$

$= E_m^2 = E_m$
$- > L \in \mathrm{GL}_m K$

(E2) Tausche Zeilen i und j, $i \neq j$.
Dann ist die tranformierte Matrix $A' = LA$ mit

$$L = \begin{pmatrix} 1 & | & 0 & 0 & | & 0 \\ - & 0 & - & - & 1 & - \\ 0 & | & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & | & 0 & 1 & | & 0 \\ - & 1 & - & - & 0 & - \\ 0 & | & 0 & 0 & | & 1 \end{pmatrix}$$

die <u>Permutationsmatrix(Transpositionsmatrix)</u>

Satz 8.6 Dem Rang der Matrix $A \in K^{m \times n}$ entspricht der Rang einer Zeilenstufenform zu $Ax = 0$ aus Gauß-Jordan.

<u>Beweis:</u> (E1) ist dasselbe wie Multiplikation mit einer Matrix $L \in \mathrm{GL}_m K$ von links $A' - \underset{\in K^{m \times m}}{L} \cdot \underset{\in K^{m \times n}}{A}$
(E2) Analog

(E3) Multipliziere die i-te Zeile von A mir $\lambda \in K \setminus \{0\}$
dann ist die tranformierte Matrix $A' = L \cdot A$ für
$L = \mathrm{diag}(1, \dots, \underset{i-\text{te Stelle}}{1, \lambda, 1}, \dots, 1) \in \mathrm{GL}_m K$
$Ax = b$
Sei nun A'' eine Zeilenstufenform in $Ax = 0$.
Dann existieren $L_1, L_2, \dots, L_k \in \mathrm{GL}_m K$ mit
$A'' = L_k \cdot \dots \cdot L_2 \cdot L_1 \cdot A =: L''$
Wir werde zeigen in Satz 8.11:
$\underset{\in \mathrm{Hom}(K^n, K^m)}{\phi_{A''}} \quad \overset{\in \mathrm{End}(K^m)}{\phi_{L''}} \quad \underset{\in \mathrm{Hom}(K^n, K^m)}{\phi_A}$ sind invertierbar
$\Rightarrow \mathrm{img}\, \phi A'' = \phi_L(\mathrm{img}\, \phi A)$
$\mathrm{rank}(A'') = \dim_K \mathrm{img}\, \phi_{A''} = \dim_K \mathrm{img}\, \phi_A = \mathrm{rank}(A)$

Lineare Abbildungen aus Matrizen

Satz 8.7 Die Abbildung $\Phi : K^{m\times n} \to \mathrm{Hom}(K^n, K^m) : A \mapsto \phi_A$ ist ein K-linearer Isomorphismus. Die Inverse Φ^{-1} ordnet einer linearen Abbildung $\phi \in \mathrm{Hom}(K^n, K^m)$ die Matrix $x[\phi]$ bezüglich der Standardbasen von K^m und K^n zu.

Beweis: Behauptung: Φ ist bijektiv. Seien $A, B \in K^{m\times n}$ und $\phi_A = \phi_B$. Offenbar gilt: $[\phi_A] = A$. Damit gilt $A = [\phi_A] = [\phi_B] = B$
d.h. Φ ist injektiv.
SEi $\phi \in \mathrm{Hom}(K^n, K^m)$ beliebig. Dann ist $\Phi([\phi]) = \phi$.
d.h. Φ ist surjektiv.
Behauptung: Φ ist linear. Seien $A, B \in K^{m\times n}, \lambda, \mu \in K$.
$\Phi(\lambda A + \mu B)(x) = \phi(\lambda A + \mu B)(x) = (\lambda A + \mu B)(x)$
$= \lambda Ax + \mu Bx = \lambda(Ax) + \mu(Bx) = (\lambda\phi_A + \mu\phi_B)(x)$
$= [\lambda(\Phi(A)) + \mu(\Phi(B))](x)$

Bemerkung 8.8 aus Proposition 5.3 folgt
$[\lambda\phi + \mu\psi] = \lambda[\phi] + \mu[\psi] \forall \lambda, \mu \in K \forall \phi, \psi \in \mathrm{Hom}(K^n, K^m)$

Korollar 8.9 $\dim_K \mathrm{Hom}(K^n, K^m) = m \cdot n$

Beispiel 8.10 $K = \mathbb{R}, m = n = 2$ Betrachte
$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$, und $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
Dann ist $\Phi(A + B)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ \frac{1}{2}x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ \frac{1}{2}x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$
$= \Phi(A)(x) + \Phi(B)(x)$

Satz 8.11 (i) $\forall A \in K^{l\times m} \forall B \in K^{m\times n} : \phi_{\mathrm{AB}} = \phi_A \circ \phi_B$
(ii) $\forall \psi \in \mathrm{Hom}(K^l, K^m) \forall \phi \in \mathrm{Hom}(K^m, K^n)$:$[\phi \circ \psi] = [\phi][\psi]$

(iii) Die Abbildung $\Phi : K^{n\times n} \to \mathrm{End}(K^n) : A \mapsto \phi_A$ ist ein
(VR-Isomorphismus) und ein Ringisomorphismus.
Insgesamt ist Φ ein Isomorphismus von K-Algebren.
Φ Ring-Iso.:$\Phi(A+B) = \Phi(A) + \Phi(B) \quad$ (8.7)
$\Phi(A \cdot B) = \Phi(A) \cdot \Phi(B)$ (noch zz)
Φ ist bijektiv. (8.7)

Beweis: Wir beweisen zunächst die erste Aussage.
Seien $A \in K^{l\times n}, B \in K^{m\times n} \Rightarrow \forall x \in K^n (\phi_A \circ \phi_B)(x)$
$= \phi_A(\phi_B(x)) = \phi_A(Bx) = ABx = (AB)(x) = \phi_{\mathrm{AB}}(x)$
Die zweite Aussage ist analog zu beweisen.

9. Die Transponierte einer Matrix

Sei A=$(\alpha_{\mathrm{ij}})_{i,j} \in K^{m\times n}$

Definition 9.1 Die Matrix $A^{\mathrm{tr}} := (\alpha_{\mathrm{ji}})_{j,i} = (x_{\mathrm{ij}})_{i,j} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \cdots & \alpha_{m1} \\ \alpha_{12} & \cdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{1n} & \cdots & \cdots & \alpha_{\mathrm{mn}} \end{pmatrix}$

Offenbar $A^{\mathrm{tr}^{\mathrm{tr}}} = A$, und Diagonalmatrizen ändern sich nicht unter Transposition

Prop 9.2 Dann gilt: $(\mathrm{AB})^{\mathrm{tr}} = B^{\mathrm{tr}} \times A^{\mathrm{tr}}$

Korollar 9.3 Wenn $A \in \mathrm{GLnK}$, so auch $A^{\mathrm{tr}} \in \mathrm{GL}_n K$ und $(A^{\mathrm{tr}})^{-1} = A^{-1^{\mathrm{tr}}}$
Beweis: $A^{\mathrm{tr}} \times A^{-1} \overset{9.2}{=} (A^{-1} \times A)^{\mathrm{tr}} = E_n^{\mathrm{tr}} = E_n$

Bemerkung 9.4 Der Zeilenrang von A ist definiert als Dimension des Zeilenraums.

Korollar 9.5 Für $A \in K^{m\times n}$ gilt: $\mathrm{rank}(A^{\mathrm{tr}}) = \mathrm{rank}(A)$
Beweis: Sei $A' =$ LA Zeilenstufenform von A(wie in 8.6) Hierfür gilt

$\text{rank}(A') = \text{rank}(A')^{\text{tr}} \Rightarrow \text{rank}(A) = \text{rank}(A')^{\text{tr}} = \text{rank}(\text{LA})^{\text{tr}} = \text{rank}(A^{\text{tr}}L^{\text{tr}})$
$= \text{rank}(A^{\text{tr}})$

10. Matrizen aus linearen Abbildungen II

Sei V ein K-VR mit dimV $= n$, und sei $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ irgendeine Basis von V.

Für v $\in V$ existieren eindeutig $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ mit
$v = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$
setze $[v]_B := \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in K^n$
Die Abbildung $\kappa_B : V \to K^n : v \mapsto [v]_B$ ist eine bijektive lineare Abbildung sprich ein K-VR Isomorphismus, weil das Bild der Basis B unter der Abbildung κ_B wegen $[b_i]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1(i - \text{te Stelle}) \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ eine Basis von K^n ist.

Seien V und W endlichdimensionale K-VR mit Basen $B = (b_1, \dots, b_n)$ und $C = (c_1, \dots, c_m)$ von V bzw. W.
Dann ist für eine lineare Abbildung $f : V \mapsto W$
$[f]_B^C = ([f(b_1)]_C, \dots, [f(b_n)]_C)$

<u>Bsp.:</u> $K = \mathbb{F}_5 = \mathbb{Z}_{/m\mathbb{Z}}$, $U = \mathbb{F}_5^2, W = \mathbb{F}_5^3, n = 2, m = 3$

$$f : V \to W : \begin{cases} b_1 \mapsto 2c_1 + 3c_2 \\ b_2 \mapsto c_1 + c_3 \end{cases}$$

$$B = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$
$$C = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

C ist linear unabhängig, da die Vektoren in Zeilenstufenform stehen.

$$[2c_1 + 3c_2]_C = \begin{matrix} 2 \\ (3) \\ 0 \end{matrix}$$

$[c_1 + c_3]_C = \begin{matrix}1\\(0)\\1\end{matrix}$

$$[f]_B^C = ([f(b_1)]_C, ([f(b_2)]_C) = \left(\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}2 & 1\\3 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$$

Proposition 10.1 für alle $v \in V$ gilt: $[f]_B^C \cdot [v]_B = [f(v)]_C$
Dies ist gleichbedeutend mit $[f]_B^C = [\kappa_C \circ f \circ \kappa_B]$
Beweis: Wir betrachten die lineare Abbildung $v \mapsto [f]_B^C[v]_B$
und $v \mapsto [f(v)]_C : v \to K^m$
Um zu zeigen, dass diese beiden linearen Abbildungen gleich sind, genügt es nach dem Hauptsatz über lineare Abbildungen sie auf einer beliebigen Basis zu vergleichen:

z.B.: $[f]_B^C \cdot [b_i]_B = [f]_B^C \cdot e_i = (\vdots)\ i -$ te Spalte der Matrix $[f]_B^C = [f(b_i)]_C$

$$v = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} : [f(v)]_C = [f]_B^C \cdot [v]_B = \begin{pmatrix}2 & 1\\3 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix} \in \mathbb{F}_5^3$$

$$v' = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} : [f(v')]_C = \begin{pmatrix}2 & 1\\3 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\6\\3\end{pmatrix} \text{mod5} = \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} \in \mathbb{F}_5^3$$

Wir definieren $\Psi_B^C : \mathrm{Hom}_K(V, W) \to K^{m\times n} : f \mapsto [f]_B^C$

Satz 10.2 Die Abbildung Ψ_B^C ist eine bijektive K-lineare Abbildung sprich ein K-VR Isomorphismus.
Beweis: Linearität folgt aus Distriutivgesetzen.
Wir wissen $\dim_K K^{m\times n} = m \cdot n = \dim_K \mathrm{Hom}_K(V, W)$
Daher genügt es für die Bijektivität die Surjektivität oder Injektivität zu zeigen.

Die Matrizen $e_{i,j} := (\mathcal{E}_{l,k})_{i,j}$ bilden eine Basis von $K^{m\times n}$, wobei
$\mathcal{E}_{l,k} := \begin{cases}1 \text{ falls } k, l = i, j\\ \quad 0 \text{ sonst}\end{cases}$
D.h. es genügt zu zeigen, dass $\forall i \in \{0, ..., m\}, \forall j \in \{0, ..., n\}$

existiert $f \in \mathrm{Hom}_K(V,W)$ mit $\Psi_B^C(f) = e_{i,j}$.
Seien i,j gegeben.
Zur Konstruktion von $f_{i,j}$ lege Werte auf einer Basis fest,
z.B.: auf B. $f_{i,j}(b_k) := \begin{pmatrix} c_j \text{ falls } k = i \\ 0 \text{ sonst} \end{pmatrix} : V \to W$

Bemerkung 10.3 Speziell : $V = K^n$ und $W = K^n$ sind B und C Standardbasen, dann gilt: $\Psi_B^C = \Phi^{-1}$

Proposition 10.4 Seien U,V,W mit Basen A,B,C
(und q=dim(U), u=dim(V), m=dim(W))

$\forall v \in V : [f]_B^C \kappa_B = \kappa_C(f(v))$
Für lineare Abbildungen $g : U \to V,\ f : V \to W$ gilt:
$[f \circ g]_A^C = [f]_B^C \circ [g]_A^B$

Das Diagramm ist kommutativ.

$$\begin{array}{ccccc} U & \xrightarrow{g} & V & \xrightarrow{f} & W \\ \kappa_A^{-1} \uparrow\downarrow \kappa_A & & \kappa_B^{-1} \uparrow\downarrow \kappa_B & & \kappa_C^{-1} \uparrow\downarrow \kappa_C \\ K^p & \xrightarrow{[g]_A^B} & K^n & \xrightarrow{[f]_B^C} & K^m \end{array}$$

<u>Beweis:</u> $[f \circ g]_A^C = [\kappa_C \circ f \circ g \circ \kappa_C^{-1}] = [\kappa_C \circ f \circ \kappa_B \circ \kappa_B^{-1} \circ g \circ \kappa_C^{-1}] =$
$[\kappa_C \circ f \circ \kappa_B^{-1}] \cdot [\kappa_B \circ g \circ \kappa_C^{-1}]$

11. Basiswechsel

Seien $B = (b_1, ..., b_n)$ und $B' = (b_1^{'}, ..., b_n^{'})$ Basen von V.
Jedes $v \in V$ lässt sich darstellen als Linearkombination von B bzw B' :

$$\kappa_B(v) = [v]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \text{ und } [v]_{B'} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{'} \\ \vdots \\ \lambda_n^{'} \end{pmatrix}$$

Insbesondere gilt für $b'_1, ..., b'_n$: $[b'_i]_B = \begin{pmatrix} s_{1i} \\ \vdots \\ s_{\text{ni}} \end{pmatrix}$, $[b'_i]_{B'} = e_i$

Es gilt: $S := \begin{array}{c} i \\ \begin{pmatrix} s_{11} & \cdots & s_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n1} & \cdots & s_{\text{nn}} \end{pmatrix} \\ [b_i]_B \end{array} = [\text{id}]_{B'}^{B}$

Dies ist die Transformationsmatrix des Basiswechsels von B' nach B

Die Spalten von s bilden eine Basis von K^n(und κ_B bijektiv) $\Rightarrow$S invertierbar

Es gilt: $S^{-1} = [\text{id}]_B^{B'}$.

Beispiel 11.1 Seien $V = \mathbb{R}^2$, $B = (e_1, e_2)$, $B' = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$.

Dann ist $S = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ und $S^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

Das ergibt sich aus folgender Rechnung:

$\frac{1}{5} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = E_2$

$v := e_1 + 2e_2$

$[v]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$[v]_{B'} = S^{-1}[v]_B = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}$

(BILD)

Proposition 11.2 Seien $f : V \to W$ linear. Ferner seien B, B' Basen von V und C, C' Basen von W.

Setze $S = [\text{id}_V]_{B'}^{B}$ und $R = [\text{id}_W]_{C'}^{C}$

Dann gilt:

$[f]_{B'}^{C'} = R^{-1}[f]_B^C \cdot S$

$[f]_B^C = R[f]_{B'}^{C'} \cdot S^{-1}$

12. Nochmals lineare Gleichungssysteme

Betrachte lineares Gleichungssystem über Körper K

$$\begin{array}{lll} \alpha_{11}x_1+ & \cdots & +\alpha_{1n}x_n = \beta_1 \\ \vdots & & \vdots \qquad (*) \\ \alpha_{1m}x_m+ & \cdots & +\alpha_{\text{nm}}x_m = \beta_m \end{array}$$

Matrixschreibweise:

$\text{Ax} = b$

mit $A = (\alpha_{\text{ij}})_{i,j}$, $b = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$

und $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Erweiterte Koeffizientenmatrix $(A|b) \in K^{m\times(n+1)}$

Zugehöriges homogenes System

$\text{Ax} = 0$ (**)

12.1 Basislösungen des homogenen Systems

Die Lösungen von (**) bilden einen Untervektorraum U von K^n

Dabei ist dimU=m-rankA=: k.

Eine Basis $(u_1, ..., u_k)$ von U heißt System von Basislösungen von (**)

Jede Lösung von (**) ist eindeutige Linearkombination von $u_1, ..., u_n$

12.2 Existenz von Lösungen

Das homogene System hat stets die triviale Lösung 0.

Proposition 12.2.1 Äquivalent sind:

(i) Das inhomogene System $\text{Ax} = b$ hat mindestens eine Lösung

(ii) Die rechte Seite b liegt im Spaltenraum von $A = \text{img}(\phi_A)$

(iii) $\text{rank}(A) = \text{rank}(A|b)$

Proposition 12.2.2 Äquivalent sind:
(i) Das lineare Gleichungssystem Ax $= b$ besitzt für jedes b mindestens eine Lösung
(ii) Die lineare Abbildung ϕ_A surjektiv
(iii) $\text{rank}(A) = m$

12.3 Die Menge aller Lösungen des inhomogenen Systems

Angenommen das inhomogene System (*) hat die Lösung $x_i \in K^n$.
Dann ist $x_i + U := \{x_i + u \mid u \in U\} = \{x_i + \lambda_1 u_1 + ... + \lambda_b u_b \mid \lambda \in K\}$
die Menge aller Lösungen von (*) (offener Unterraum von K^n)

12.4 Quadratisches Gleichungssystem

Sei m=n, das heißt $A \in K^{n \times n}$ quadratisch.

Proposition 12.4.1 Äquivalent sind:
(i) Das lineare Gleichungssystem Ax $= b$ besitzt eine eindeutige Lösung
(ii) Das lineare Gleichungsystem Ax $= b$ besitzt <u>für jedes b</u> eine eindeutige Lösung
(iii) $\text{rank}(A) = n$
(iv) $A \in \text{GL}_n K$

Bemerkung

$C = ([0, 1])$ ist gleich der Menge aller stetigen Abbildungen von $[0, 1]$ nach $\mathbb{R}$
Bsp.: für lineare Abbildungen auf V.
$\int : V \to V : f \mapsto \int f(x)\text{dx}$
$\int(\lambda f(x) + \mu g(x)\text{dx}) = \lambda \int f(x)\text{dx} + \mu \int g(x)\text{dx}$

13. Matrixgleichungen und Matrixinversion

Seien $A \in K^{m\times n}$ und $B = K^{m\times p}$ gegeben.
Wir bezeichnen die k-te Spalte von B mit b_k d.h. $B = (b_1, ..., b_p)$.
Für jedes $k \in \{1, \dots, p\}$ erhält man ein lineares Gleichungssystem
$\text{Ax} = b_k$ (*)

Falls existieren $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(p)} \in K^n$ mit $\forall k \in \{1, ..., p\}$, $Ax^{(k)} = b_k$
dann lässt sich die Matrix X bilden mit $X = (x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(p)}) \in K^{n\times p}$

Wir definieren mit (**) $\text{AX} = B$ die Matrixgleichung.
Falls (**) eine Lösung besitzt, bilden die Spalten von $X \in K^{n\times p}$ simultan Lösungen für die p-Gleichungen (*).

Beispiel: $K = \mathbb{F}_{13} = \mathbb{Z}_{/13\mathbb{Z}}$, $m = n = 2$, $p = 3$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 11 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 5 & 9 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ Gesucht: $X = \left(x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}\right)$ mit $AX = B$

Erweiterte Koeffizientenmatrix:

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 0 & 11 & 5 & 9 & 0 \\ 2 & 7 & 3 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

Berechne Zeilenstufenform mit Gauss-Jordan(Zeilentausch):

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 2 & 7 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 11 & 5 & 9 & 0 \end{array}\right)$$

Rückwärts einsetzen ergibt die Lösungen $x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}$

$11 \cdot x_2^{(1)} = 5$

$x_2^{(1)} = 11^{-1} \cdot 5 = 6 \cdot 5 = 30 \text{mod} 13 \ = 4$

$2 \cdot x_1^{(1)} + 7 \cdot 4 = 3$

$x_1^{(1)} = 2^{-1} \cdot (3 - 28) = 2^{-1} \cdot 1 = 7$

$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$x^{(2)} = \begin{pmatrix} 7 \cdot (4-14) \\ 6 \cdot 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$x^{(3)} = \begin{pmatrix} 2^{-1} \cdot 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 7 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>Speziell:</u> $m = n = p$ und $B = E_n$
Dann ist $AX = E_n,\ X \in K^{n \times n}$
Das System besitzt eine Lösung $\iff A \in \mathrm{GL}_n K$

<u>Beispiel:</u> $K = \mathbb{F}_{13},\ A = \begin{pmatrix} 0 & 11 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 11 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\overset{\text{Zeilentausch}}{=} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 11 & 1 & 0 \end{array}\right)$$
$$\overset{\text{2. Zeile}\cdot 6}{=} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & 0 \end{array}\right)$$
$$\overset{1.Z+6\cdot 2.Z}{=} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 10 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & 0 \end{array}\right)$$
$$\overset{1.Z\cdot 7}{=} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 6 & 0 \end{array}\right)$$

Bestimmung der Lösung für $AX = B$ für A invertierbar: $X = A^{-1}B$

<u>Beispiel:</u> $\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 9 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 7 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Kapitel 4 Affine Geometrie

1. Quotientenräume

Sei V ein K-VR und $U \leq V$ ein Unterraum von V.

Definition 1.1 Sei $x \in V$. $x + U := \{x + u \mid u \in U\}$ Nebenklassen von x bzgl. U

Proposition 1.2 $V/U := \{x + U \mid x \in V\}$ ist eine Partition von V.
Beweis: Offenbar: V/U überdeckt V, denn: $x \in x + U$, weil $0 \in U$
Seien $x, y \in V$ und $z \in (x + U) \cap (y + U)$
$\Rightarrow \exists u, u' \in U : x + u = z = y + u' \Rightarrow x - y = u - u' \in U$
Dann ist $x + u'' = y + u' - u + u'' \in y + U$, $d.h.$ $x + U \leq y + U$
Aus Symmetrie folg $x + U = y + U$ $\square$

Auf V/U lässt sich eine Addition und Skalarmultiplikation definieren:
$(x + U) + (y + U) := (x + y) + U$ und
$\lambda(x + U) := (\lambda x) + U$

Proposition 1.3 / Definition 1.4 Das Tupel $(V/U, +, \cdot)$ ist ein K-Vektorraum der Quotientenraum von U nach V

Proposition 1.5 Ist V endlichdimensional, so gilt $\dim(U) + \dim(V/U) = \dim(V)$
Beweis: Sei $(u_1, u_2, ..., u_k)$ Basis von U. Dann existieren $(v_1, v_2, ..., v_m)$, sodass $(u_1, u_2, ..., u_k, v_1, v_2, ..., v_m)$ Basis von V.
Definiere lineare Abbildung
$\phi : V \to V : \lambda_1 u_1 + ... + \lambda_k u_k + \mu_1 v_1 + ... + \mu_m v_m \mapsto \mu_1 v_1 + ... \mu_m v_m$
$\Rightarrow \ker \phi = U$
$\Rightarrow \dim \operatorname{img} \phi = \dim V - k$

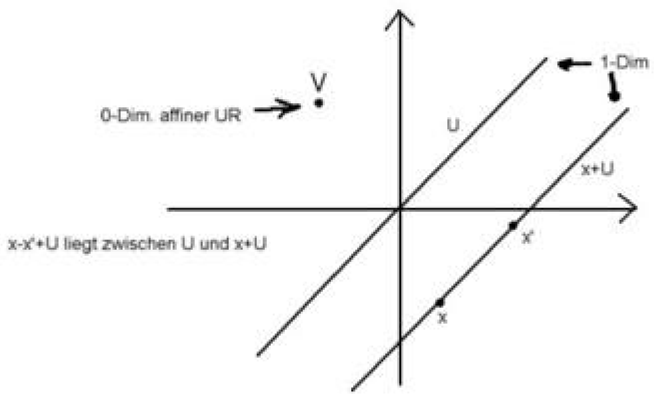
Proposition 1.6 Sei $\phi \in \text{End}(V)$ mit $\phi(U) \leq U$.
Dann definiert $\phi : V/U \to V/U : x + U \to \phi(x) + U$
eine lineare Abbildung auf V/U
Beweis: Zu zeigen: Wohldefiniertheit: Seien $x, y \in V$ mit
$x + U = y + U$, also $x - y \in U$
$\Rightarrow \phi(x) - \phi(y) = \phi(x - y) + U \Rightarrow \phi(x) + U = \phi(y) + U$ □

$\Rightarrow$ lin Abbildung $\phi V/U \to V/U : x + U \mapsto \phi(x) + U$
$\phi(\lambda_1 u_1 + ... + \lambda_k u_k + \mu_1 v_1 + ... + \mu_m v_m) = \mu_1 v_1 + ... + \mu_m v_m$
$\Rightarrow \phi$ surjektiv $\Rightarrow \dim(V/U) = \dim V - k$ □

2. Affine Unterräume

Sei wieder V ein K-VR.

Definition 2.1 Ein Affiner Unterraum von V ist eine Nebenklasse(x+U) bzgl. eines belibigen (linearen) Unterraums U. Die Menge aller affinen UR von V wird mit AG(V) bezeichnet. wir setzen $\dim_k(x + U) := \dim U$.
$\text{AG}(V) := \{x + U \mid x \in V, U \in V\}$



Definition 2.2 Für $v_1, ..., v_m \in V$ und $\lambda_1, ..., \lambda_m \in K$ heißt die Linearkombination $\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_m v_m$ Affinkombination, falls $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$

Die Menge $\operatorname{aff}(M) := \{\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_m v_m \mid \lambda_i \in K, v_i \in M, \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1\}$

heißt affine Hülle von M.

Proposition 2.3 Für $M \leq V$ ist $\operatorname{aff}(M)$ der kleinste affine Unterraum, der M enthält.
Beweis: Sei $x \in M$ und $v_1, ..., v_m \in M$ sowie $\lambda_1, ..., \lambda_m \in K$

$$\Rightarrow x + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (v_i - x) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i + \left(1 - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\right) x$$

Es gilt: $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i + 1 - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$ und daher
$\operatorname{aff}(M) = x + \operatorname{lin}\{y - x \mid y \in M\}$

Wird $\operatorname{lin}\{y - x \mid y \in M\}$ kleinster Unterraum der $\{y - x \mid y \in M\}$ enthält, folgt die Behauptung.
□

2.4 Abschnitt über Matriode

Definition 2.5 Ab jetzt: $V = K^n$ endlichdimensional!
Die affinen Unterräume der Dimensionen 0,1,2, n-1
heißen (affine) Punkte, Geraden, Ebenen, Hyperebenen.
$\mathrm{AG}_n(K) := \mathrm{AG}(K^n)$

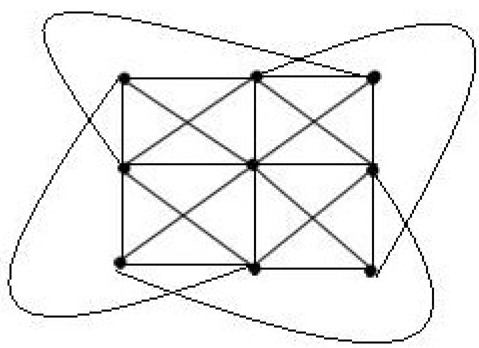
Die affinen Uterräume von K^n sind genau die Lösungsmenge von linearen Gleichungssystem endlich vieler linearer Gleichungen in n Unbestimmten über K.
Die linearen Unterraume sind genau sind genau die Lösungen linearer GLS.

Proposition 2.6 Für jede affine Hyperebene H existiert eine lineare Abbilsung
$\underset{\text{auch Linearform genannt}}{\phi_H : K^n \to K}$ und $\beta \in K$ mit
$H = \{x \in K^n \mid \phi_H(x) = \beta\}$
Umgekehrt ist jede solche Menge eine Hyperebene.
Beweis: Sei $H = x + U$ mit $x \in K^n$ und $U \leq K^n$,
wobei $\dim(U) = u - 1$.
Dann existiert eine lineare Abbildung $\phi_H : K^n$ mit $\ker \phi_H = U$.
Aus der linearität von ϕ_H folgt die Behauptung.
$\square$

Defenition 2.7 Zwei affine Unterräume $x + U$ und $y + W$ mit $1 \leq \dim(U) \leq \dim(W)$ heißen parallel, falls $U \leq W$. Zwei nichtparallele disjunkte affine Unterräume(der $\dim \geq 1$) heißen windschief.

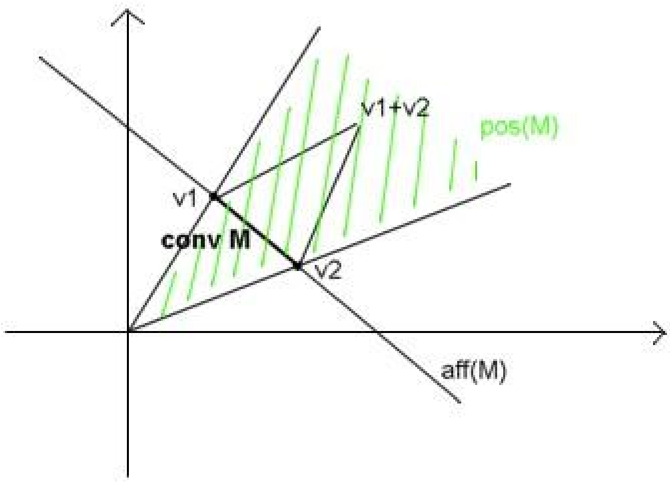
$$(\alpha_1, ..., \alpha_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n = \beta$$

Beispiel: $K = \mathbb{F}_3, V = \mathbb{F}_3^2$
Es bilden die Verbindungen der 9 Punkte eine affine Ebene.



Definition 2.8 Eine Abbildung ϕ: $K^n \to K^n$ der Form $\phi(x) = v + \psi(x)$ für $v \in K^n, \psi \in \text{Hom}(K^n, K^n)$ heißt affin.

Jetzt $K = \mathbb{R}, V = \mathbb{R}^n, M \subseteq V$
$\text{pos}(M) := \{\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_m v_m \mid \lambda_i \in \mathbb{R}, v_i \in M, \lambda_i \geq 0\}$
heißt positiver Kegel von M.
$\text{conv}(M) := \text{pos}(M) \cap \text{aff}(M)$ heißt konvexe Hülle.



Definition 2.9 ein (konvexes) Polytop in $\mathbb{R}^n$ ist die konvexe Hülle von unendlich vielen Punkten.

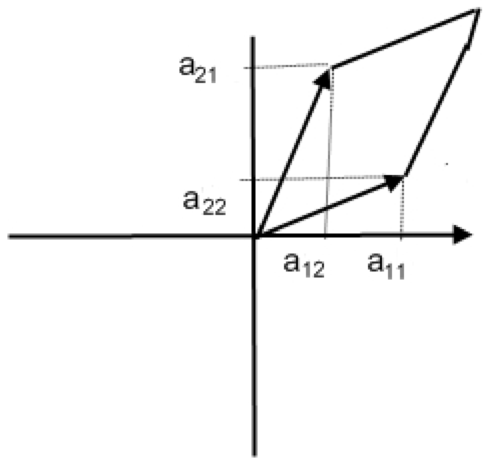
Porposition 2.10 Sei $P \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Polytop und $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine lineare Abbildung $\Rightarrow \phi(P)$ ist ein Polytop in $\mathbb{R}^m$.

Kapitel 5 Determinanten

1. Vorüberlegungen

Sei K ein beliebiger Körper, $n \geq 1$.
Ziel: Einführung einer Abbildung
$\det : K^{n\times n} \to K$
mit den Eigenschaften:
(i) $\det(E_n) = 1$
(ii) $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B), \ \forall A, B \in K^{n\times n}$
(iii) $\det(A^{\mathrm{tr}}) = \det(A)$
(iv) $\det(A) \neq 0 \iff A$ invertierbar$(A \in \mathrm{GL}_n K)$
(v) Für $K = \mathbb{R}$ beschreibt die Determinante einer Matrix A
$\det(A)$ das Volumen des Parallelepipeds das von den Spalten von
A erzeugt wird.(egal ob Spalten oder Zeilen)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, n = 2$$



Falls $A = E_n$ so ist $P(A) = [0,1]^n$
der Einheitswürfel $= \mathrm{conv}\{e_x \mid X \subseteq \{1, \dots, n\}\}$
$$e_x = \sum_{i\in X} e_i$$

2. Multilinearformen

Definition 2.1 Eine Abbildung $F : \underbrace{K^n \times ... \times K^n}_{n \text{ mal}} \to K$ heißt:

(i) Multilinearform auf K^n(auch n-Form)
$\forall i \in \{1, ..., n\} \forall v_1, ..., v_n \in K^n \forall \lambda, \mu \in K, \forall x, y \in K^n :$
$F(v_1, ..., v_{i-1}, \lambda x + \mu y, v_{i+1}, ..., v_n)$
$= \lambda F(v_1, ..., v_{i-1}, x, v_{i+1}, ..., v_n) + \mu F(v_1, ..., v_{i-1}, y, v_{i+1}, ..., v_n)$
Das heißt: F ist in jedem ihrer Argumente linear.

(ii) alternierende Multilinearform, falls (i) und zusätzlich gilt:
$F(v_1, ..., v_n) = 0, \text{falls existieren } i \neq j$ mit $v_i = v_j$

(iii) normierte alternierende Multilinearform (oder Determinantenform)
falls (i), (ii) gelten und zusätzlich: $F(e_1, ..., e_n) = 1$

Bemerkung 2.2
In der Literatur findet sich manchmal statt der Bedingung (ii) die folgende Bedinungung:
(*) $F(... \underbrace{, x,}_{i.\text{Stelle}} ... \underbrace{, y,}_{j.\text{Stelle}} ...) = -F(... , \underbrace{y}_{i}, ... , \underbrace{x}_{j}, ...)$
es gilt: "(ii)⇒(*)"(Vor. (i) gilt!), denn (ohne Einschränkung $n = 2$):
$F(x, y) + F(y, x) \overset{(ii)}{=} F(x, y) + F(y, x) + F(x - y, x - y)$
$\overset{(i)}{=} F(x, y) + F(y, x) + F(x, x - y) - F(y, x - y)$
$\overset{(i)}{=} F(x, y + x - y) + F(y, x - x + y)$
$= F(x, x) + F(y, y) \overset{(ii)}{=} 0 \iff F(x, y) = -F(y, x)$

-> Die Umkehrung gilt im Allg. nicht!!!
$2 := 1 + 1$ (mult. neutr. Elem. in K)
$2F(x, x) = F(x, x) + F(x, x) \overset{(*)}{=} F(x, x) - F(x, x) = 0$
$\Rightarrow F(x, x) = 0 \vee 2 = 0$
D.h. wenn $2 \neq 0$ ist (ii) $\iff$ (*)

Beispiel 2.3
$K=\mathbb{F}_2$ auf $\mathbb{F}_2^2$ existiert eine Multilinearform, die (*) erfüllt, aber nicht (ii).
$F\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\right) := x_1y_1+x_2y_2 \Rightarrow F\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\right) = x_1^2+x_2^2 \neq 0$ für
$x_1=0 \wedge x_2=1$ (ii) gilt also nicht
$F\left(\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\right) = x_1y_1+x_2y_2 = -(x_1y_1+x_2y_2) = -F\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\right)$

Beispiel 2.4 Die Abbildung $\mathrm{id}_K : K \to K = K^1 : x \mapsto x$
ist eine Determinantenform auf K^1. Denn:
(i) multilinear ist das selbe wie linear fr n=1
(ii) automatishc erfüllt, da keine 2 Elemente vorhanden
(iii) id(1)=1

Beispiel 2.5
Die Abbildung $F : K^2 \times K^2 \to K : \left(\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}\right) :\mapsto u_1v_2-u_2v_1$
ist die Determinantenform auf K^2.
(i) klar
(ii) $F\left(\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}\right) = u_1u_2-u_2u_1=0$
(iii) $F\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = 1\cdot 1-0=1$

Beispiel 2.5 $F : K^2\times K^2 \to K : \left(\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}\right) \mapsto u_1v_2-u_2v_1$
Zu zeigen: F ist unlinear $\forall v_1,v_2\in K^2, \lambda,\mu\in K \forall x,y\in K^{2:}$
$F(\lambda x+\mu y, v_2) = \lambda F(x,v_2)+\mu F(y,v_2)$
$F(v_1,\lambda x+\mu y) = \lambda F(v_1,x)+\mu F(v_1,y)$

Beweis:
$F\left(\lambda\begin{pmatrix}x_1\\2_2\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}v_{2_1}\\v_{2_2}\end{pmatrix}\right) = (\lambda x_1+\mu y_1)v_{2_2}-(\lambda x_2+\mu y_2)v_{2_1}$
$= \lambda\underbrace{(x_1v_{2_2}-x_2v_{2_1})}_{=F(x,v_2)}+\mu\underbrace{(y_1v_{2_2}-y_2v_{2_1})}_{=F(y,v_2)}$

Lemma 2.6 Sei $F : \underbrace{K^n \times ... \times K^n}_{n-\text{mal}} \to K$ alternierend und multilinear

Falls $(x_1, \dots, x_n)$ linear abhängig in K^n, so $F(x_1, \dots, x_n) = 0$.

Beweis: Ohne Einschränkung, sei $x_1 = \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_n x_n$ für $\lambda_i \in K$

$\Rightarrow F(\lambda_2 x_2 + ... + \lambda_n x_n, x_2 + ... + x_n) = \sum_{i=2}^{n} \lambda_1 \underbrace{F(x_1, x_2, \dots, x_n)}_{F \text{ alternierend} \Rightarrow = 0}$

$\square$

Satz 2.7 Sei $F : \underbrace{K^n \times ... \times K^n}_{n-\text{mal}} \to K$ alternierende Multilinearform.

Falls $F(e_1, e_2, \dots, e_n) = 0$, dann ist $F \equiv 0$.(F ist konstant-gleich)

Beweis: Wir führen den Beweis per Induktion nach n.

$n = 1 : F(1) = 0 \Rightarrow F(\lambda \bullet 1) = \lambda F(1) = 0, \lambda \in K$

Sei $n \geq 2$ und die Behauptung beweisen für alle alternierenden $(n-1)$ Formen.

Wir zeigen zunächst

(*) $F(e_1, e_2, \dots, e_n) = 0 \qquad \forall \sigma \in \text{Sym}(\{1, \dots, n\})$

Sei nun $\sigma \in \text{Sym}(\{1, \dots, n\})$. Dann gilt: $(\sigma(i) = 1 \neq \sigma(1))$

$F(e_{\sigma(1)}, \dots, \underset{\uparrow i}{e_1}, \dots, e_{\sigma(n)}) = -F(e_1, e_{\sigma(2)}, \dots, \underset{\uparrow i}{e_{\sigma(1)}}, \dots, e_{\sigma(n)})$

Die Abbildung $F_1 : \underbrace{K^{n-1} \times ... \times K^{n-1}}_{n-1 \text{ mal}} \to K : (y_2, y_3, \dots, y_n) \mapsto F\left(e_1, \underset{\in K^n}{\begin{pmatrix} 0 \\ y_2 \end{pmatrix}}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ y_n \end{pmatrix}\right)$

ist multilinear und alternierend.

Hier bezeichne $e_2' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \dots, e_n' = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ die Standardbasis von K^{n-1}

$\Rightarrow F_1(e_2', \dots, e_n') = F(e_1, e_2, ..., e_n) = 0$ nach IV gilt $F_1 = 0$.

Œ $\sigma(1) \neq 1$

$\Rightarrow F(e_{\sigma(1)}, \dots, e_i, \dots, e_{\sigma(n)}) = -F(e_1, \dots, e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)})$

$= -F_1(e'_{\sigma(2)}, \dots, e'_{\sigma(1)}, \dots, e'_{\sigma(n)}) = 0.$

Nächster Schritt, wir zeigen jetzt $\forall x_2, \dots, x_n \in K^n$
(**) $F(e_1, x_2, \dots, x_n) = 0.$
Wir schreiben $x_i = \lambda_i e_1 + \Lambda_i$ wobei $\Lambda_i \in \text{lin}\{e_2, \dots, e_n\}$.
$\Rightarrow F(e_1, x_2, \dots, x_n) = F(e_1, \lambda_2 e_1 + \Lambda_2, \lambda_3 e_1 + \Lambda_3, \dots, \lambda_n e_1 + \Lambda_n)$
$= \lambda_2 \underbrace{F\ (e_1, e_1, \lambda_3 e_1 + \Lambda_3\ , \dots, \lambda_n e_1 + \Lambda_n)}_{=0} + F(e_1, \Lambda_2, \lambda_3 e_1 + \Lambda_3, \dots\ , \lambda_n e_1 + \Lambda_n)$
$= F(e_1, \Lambda_2, \lambda_3 e_1 + \Lambda_3, \dots, \lambda_n e_1 + \Lambda_n)$
$= F(e_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \lambda_4 e_1 + \Lambda_4, \dots, \lambda_n e_1 + \Lambda_n)$
$= \dots = F(e_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \dots, \Lambda_n) \underset{(*)}{\overset{F_1=0}{=}} 0.$

Seien nun $z_1, \dots, z_n \in K^n$ beliebig. Wieder
$z_i = \gamma_i e_1 + \Gamma_i \in \text{lin}\{e_2, \dots, e_n\}$
$\Rightarrow F(z_1, \dots, z_n) = F(\gamma_1 e_1 + \Gamma_1, \dots, \gamma_n e_1 + \Gamma_n) = F(e_1, \gamma_2 e_1 + \Gamma_2, \dots, \gamma_n e_1 + \Gamma_n) + F(\Gamma_1, \gamma_2 e_1 + \Gamma_2, \dots, \gamma_n e_1 + \Gamma_n) = F(\Gamma_1, \gamma_2 e_1 + \Gamma_2, \dots, \gamma_n e_1 + \Gamma_n)$
$= -\gamma_2 F(e_1, \Gamma_2, \gamma_3 e_1 + \Gamma_3, \dots, \gamma_n e_1 + \Gamma_n), F(\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \gamma_n e_1 + \Gamma_n)$
$= \dots = F(\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n) = 0$, und $(\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n)$ lin. abh.

Korollar 2.8
Seien $F, G : \underbrace{K^n \times \dots \times K^n}_{n \text{ mal}} \to K$ alternierende Multilinearform
mit $F(e_1, \dots, e_n) = G(e_1, \dots, e_n) \Longrightarrow F = G$

3. Konstruktion der Determinantenform auf K^n

Im Beispiel 2.4 und 2.5 hatten wir bereits Determinantenformen
$D_1 : K^1 \to K : x \mapsto x$ und $D_2 : K^2 \times K^2 \to K : (x, y) \mapsto x_1 y_2 - x_2 y_1$
konstruiert.
Für $n \geq 3$ gehen wir induktiv vor, d.h. wir gehen davon aus, dass die Determinantenform $D_{n-1} : \underbrace{K^{n-1} \times \dots \times K^{n-1}}_{n-1} \to K$ konstruiert ist.

Wir setzen $A = (\alpha_{ij})$ $D_n(A) := \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \alpha_{ij} D_{n-1}(A_{i,j}), i \in \underbrace{\{1, \dots, n\}}_{\text{beliebig!}}$

$$\text{Dabei ist } A_{i,j} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1j} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{i1} & \cdots & \alpha_{ij} & \cdots & \alpha_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nj} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & | & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & | & \ddots & \vdots \\ -- & -- & -- & -- & -- \\ \vdots & \ddots & | & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & | & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \in K^{(n-1)\times(n-1)}$$

Die Matrix, die aus A durch Streichen der i-ten Zeile und der j-ten Spalte entsteht.(Laplace-Entwicklung nach i-ter Zeile)

Notation: $D_i(A) =: D_n((\alpha_{ij})_{i,j}) = |\alpha_{ij}|$

Beispiel 3.1 $K = \mathbb{F}_3, n = 3$

Entw. nach 1. Zeile: $i = 1$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \cdot \left| \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{matrix} \right| - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 2 \cdot \left| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{matrix} \right| = 2 \cdot (1 \cdot 2 - 2 \cdot 0) + 2 \cdot (1 \cdot 0 - 2 \cdot 0)$$

$$= 2 \cdot 2 = 1$$

$i = 2$

$$-1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 0 \cdot \left| \begin{matrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{matrix} \right| - 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

Proposition 3.2 Die Abbildung $D_n : K^{n\times n} \to K$ ist eine Determinanten-form.

Beweis: Sei $A = (a_1, \dots, a_n)$ mir $a_i \in K^n$, $a_i = \begin{pmatrix} \alpha_{1i} \\ \vdots \\ \alpha_{ni} \end{pmatrix}$

Die Abbildung $a_j \mapsto a_{ij} \;\; D_{n-1}(A_{ij}) : K^n \to K$ ist linear.

Hieraus folgt, dass: $D_n(A) = \sum\limits_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \alpha_{ij} D_{n-1}(A)$ multilinear ist.

Sei $A = (\alpha_{ij}) \in K^{n\times n}$ mit der Eigenschaft $\alpha_k = \alpha_{k+1}$.

$D_n(A) = D(a_1, \dots, a_k, a_{k+1}, a_n) = \sum\limits_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \alpha_{ij} D_{n-1}(A_{ij})$

Induktion $->$ $= (-1)^{i+k} \alpha_{ik} D_{n-1}(A_{ik}) + \sum\limits_{j=1}^{n} (-1)^{i+k} \alpha_{i,k+1} D_{n-1}(A_{i,k+1}) = 0$

Ergänzung: Die Symmetrische Gruppe/Permutationen

Sei M eine nicht-leere Menge. Die Symmetrische Gruppe $\mathrm{Sym}(M)$ ist definiert als $\mathrm{Sym}(M) := \{\sigma \in M^M \mid \sigma \text{ ist bijektiv}\}$

Falls M eine endliche Menge mit $n > 0$ Elementen ist, dann können wir o.B.d.A annehmen, dass $M = \{1, 2, \ldots, n\}$ und bezeichnen $s_n := \mathrm{Sym}(\{1, \ldots, n\})$.

Ein Element $\sigma \in s_n$ heißt Permutation.
Eine Transposition ist eine Permutation, die genau zwei Elemente vertauscht, d.h. für eine Transposition $i \neq j$ gilt:
$\tau_j(i) = j$, $\tau_i(j) = i$

Eine Transposition $\tau_{i,i+1}$ heißt benachbarte Transposition für $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Beispiel: $M = \{1, 2, 3\}$, $|s_3| = 6$

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}, \underbrace{\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}}_{\tau_{12}}, \underbrace{\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}}_{\tau_{23}}, \underbrace{\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}}_{\tau_{13}}, \begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$$

s_3 ist nicht kommutativ, denn

$$\tau_{12} \cdot \tau_{23} = \begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$$
$$\neq \tau_{23} \cdot \tau_{12} = \begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$$

Proposition: $|s_n| = n!$

Definition: Sei $\sigma \in s_n$. ein Paar $i < j$,$(i, j \in \{1, \ldots, n\})$ ist ein Fehlstand.
Die Anzahl der Fehlstände, bezeichnen wir mit $a(\sigma)$.

Beispiel: $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

$1 < 2$ ist ein Fehlstand, da $\sigma(1) = 2 > 1 = \sigma(2)$

$a(\sigma) = \overset{1<2}{1} + \overset{3<4}{1} = 2$

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$a(\sigma) = 4 + 3 + 2 + 1 = 10 = \frac{n(n-1)}{2}$ *für* $n = 5$

Definition: Sei $\sigma \in s_n$. Das <u>Vorzeichen</u> von σ ist $\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^{a(\sigma)}$.

Äquivalente Definition:

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = \begin{cases} +1, & \text{wenn } \sigma \text{ Produkt von gerade vielen Transpositionen ist} \\ -1, & \text{wenn } \sigma \text{ Produkt von ungerade vielen Transp. ist} \end{cases}$$

Man nennt Permutationen $\sigma \begin{Bmatrix} \text{gerade} \\ \text{ungerade} \end{Bmatrix}$ falls $\operatorname{sgn}(\sigma) = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}$.

Satz: $\forall \sigma_1, \sigma_2 \in s_n : \operatorname{sgn}(\sigma_1 \cdot \sigma_2) = \operatorname{sgn}(\sigma_1) \cdot \operatorname{sgn}(\sigma_2)$

HA37

A1 Jede Permutation ist Produkt von Transpostionen

A2 Jede Permutation ist Produkt von benachbarten Transpositionen

Lemma 1: Eine benachbarte Transposition verändert die Anzahl der Fehlstände um 1, d.h. sei $\sigma \in s_n, i \in \{1, \dots, n-1\}$

$\operatorname{sgn}(\sigma \cdot \tau_{i,i+1}) = a(\sigma) \pm 1 = \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \operatorname{sgn}(\tau_{i,i+1})$

Lemma 2: Eine belibige Transposition ist Produkt von ungerade vielen benachbarten Transpositionen.

Korollar: Eine beliebige Transposition $\tau \in s_n$ hat Vorzeichen $\mathrm{sgn}(\tau) = -1$.
Außerdem gilt für beliebige Transpositionen $\tau, \widetilde{\tau} \in s_n$:
$\mathrm{sgn}(\tau \cdot \widetilde{\tau}) = \mathrm{sgn}(\tau) \cdot \mathrm{sgn}(\widetilde{\tau}) = 1$
Also sind die obigen Definitionn Äquivalent.

Definition: $A_n \subseteq s_n$ mit $A_n = \{\sigma \in s_n \,|\, \mathrm{sgn}(\sigma) = +1\}$
$A_n' \subseteq s_n$ mit $A_n' = \{\sigma \in s_n \,|\, \mathrm{sgn}(\sigma) = -1\}$

Proposition: $A_n \leq s_n$ ist eine Untergruppe
Beweis: •A_n ist nicht leer, da $\mathrm{id} \in A_n$
•Für $\sigma_1, \sigma_2 \in A_n$ gilt: $\mathrm{sgn}(\sigma_1 \cdot \sigma_2) = 1 \cdot 1 = 1$ (UG1)
• Sei $\sigma \in A_n$. Dann gilt:
$1 = \mathrm{sgn}(\mathrm{id}) = \mathrm{sgn}(\sigma \cdot \sigma^{-1}) = \mathrm{sgn}(\sigma) \cdot \mathrm{sgn}(\sigma^{-1}) = \mathrm{sgn}(\sigma^{-1})$
also $\mathrm{sgn}(\sigma^1) \in A_n$ (UG2)

Definition 5.3 Die Abbildung $D_n \cdot K^{n \times n} \to K$ heißt Determinante
$\det := D_n$.

Bemerkung: der Wert der Determinante ist unabhängig von
der für die Laplace Entwicklung gewählten Zeile i.

4. Eigenschaften der Determinante

Proposition 4.1 Sei $A \in K^{n \times n}$. Dann gilt: $\det(A) = \det(A^{\mathrm{tr}})$.

Beweis: Definiere folgende Abbildung für $j \in \{1, \dots, n\}$
$D^n(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \alpha_{ij} \, D^{n-1}(A_{ij})$
Weise analog zu 3.2 nach, dass D^n eine Determinantenform ist.

Aus Korollar 2.8 folgt, dass $D^n = D_n$ ist.

Damit gilt $\det(A) = D_n(A) = D^n(A) = D_n(A^{\mathrm{tr}}) = \det(A^{\mathrm{tr}})$

Proposition 4.2 Seien $A, B \in K^{n\times n}$. Dann gilt:
i) $\det(A\cdot B) = \det(A)\cdot\det(B)$.
ii) Falls A invertierbar ist, ist die Determinante $\det(A) \neq 0$,
und $\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$

Beweis: zu i) Idee: Definiere zwei Multilinearformen F_A und G_A, mit $F_A(E_n) = G_A(E_n)$ und benutze Korollar 2.8-

Seien $B = (b_1, \dots, b_n) \in K^{n\times n}$ und $A = (a_1, \dots, a_n) \in K^{n\times n}$.
Betrachte folgende Abbildungen $F_A : K^{n\times n} \to K$ mit
$F_A(B) = \det(Ab_1, Ab_2, \dots, Ab_n) = \det(A\cdot B)$

Da $b_i \mapsto Ab_i$ eine lineare Abbildung ist für alle $i \in \{1, \dots, n\}$, ist F_A eine Multilinearform. Da det alternierend ist, ist auch F_A alternierend.
Es gilt: $F_A(E_n) = \det(Ae_n, \dots, Ae_n) = \det(a_1, \dots, a_n) = \det(A)$

Betrachte außerdem $G_A : K^{n\times n} \to K$ mit $G_A(B) = \det(A)\cdot\det(B)$.
Dies ist abermals eine alternierende Multilinearform mit
$G_A(E_n) = \det(A)\cdot\det(E_n) = \det(A)$.

Da F_A und G_A zwei alternierende Multilinearformen mit $\det(A) = F_A(E_n) = G_A(E_n)$ sind, folgt dass $F_A = G_A$ ist aus Korollar 2.8. Es gilt insbesondere:
$\det(A\cdot B) = F_A(B) = G_A(B) = \det(A)\cdot\det(B)$

zu ii) Da A invertierbar ist, existiert $A^{-1} \in K^{n\times n}$ mit $A\cdot A^{-1} = E_n$
$1 = \det(E_n) = \det(A\cdot A^{-1}) = \det(A)\cdot\det(A^{-1})$
$\Rightarrow \det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$
insbesondere gilt, dass $\det(A) \neq 0$ ist.

Satz 4.3 Sei $A \in K^{n\times n}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:
i) $A \in \mathrm{GL}_n K$, d.h. A invertierbar
ii) $\det(A) \neq 0$
iii) Für alle $b \in K^n$ ist $Ax = b$ eindeutig lösbar.
iv) Die Spalten von A sind linear unabhängig.
v) Die Zeilen von A sind linear unabhängig.
vi) $\mathrm{rank}(A) = n$

Beweis: i) $\Rightarrow$ii) ist Proposition 4.2 ii)
ii)$\Rightarrow$i) Beweis durch Kontraposition, d.h. $A \notin \mathrm{GL}_n K \Rightarrow \det(A) = 0$
Wenn $A \notin \mathrm{GL}_n K$, dann ist die lineare Abbildung $x \mapsto Ax$ nicht surjektiv, also müssen die Spalten von A linear abhängig sein und nach Lemma 2.6 ist dann $\det(A) = 0$.

Satz 4.4[Leibnitz-Formel] Sei $A = (\alpha_{ij})_{i,j} \in K^{n\times n}$
Dann gilt: $\det(A) = \sum\limits_{\sigma \in s_n} \mathrm{sgn}(\sigma) \cdot \alpha_{1,\sigma(1)} \cdot \alpha_{2,\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot \alpha_{n,\sigma(n)}$
Beweis: HA

5. Ähnlichkeit von Matrizen

Definition 5.1 Zwei quadratische Matrizen$A, B \in K^{n\times n}$ sind ähnlich, falls es eine invertierbare Matrix $S \in \mathrm{GL}_n K$ gibt mit: $B = S^{-1}AS$.

Bemerkung: $A \sim B :\Longleftrightarrow$ A und B sind ähnlich.
Dann ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation

Als Folgerung aus Proposition 4.2 erhält man:

Proposition 5.2 Ähnliche Matrizen haben die selbe Determinante
Beweis: Falls A und B ähnlich sind, existiert $S \in \mathrm{GL}_n K$ mit
$B = S^{-1}AS$. Daraus folgt $\det(B) = \det(S^{-1}AS) \overset{4.2(i)}{=} \det(S^{-1}) \cdot \det(A) \cdot \det(S)$
$\overset{4.2(\mathrm{ii})}{=} \det(A) \cdot \det(S^{-1}) \cdot \det(S) = \det(A)$

Sei $\phi \in \mathrm{End}_K K^n$ und $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ Basen von K^n. Dann sind
$[\phi]_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}$ und $[\phi]_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1}$ ähnlich(mit $S = [\mathrm{id}_K]_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}$)
Damit ist $\det(\phi) := \det[\phi]_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}$ wohldefiniert.

6. Determinanten&Gauß-Jordan-Elimination

Proposition 6.1 Sei $A \in K^{n\times n}$ mit $A = (\alpha_{ij})_{i,j=1,..,n}$ eine
obere Dreiecksmatrix, d.h. $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$ bzw. $\alpha_{\mathrm{ij}} = 0$ für $i > j$.
Dann ist $\det(A) = \alpha_{11} \cdot \alpha_{22} \cdot ... \cdot \alpha_{\mathrm{nn}}$

Beweis: Induktion über n.
Induktionsanfang: $n = 1$. $A = (\alpha_{11}) \Rightarrow \det(A) = \alpha_{11}$

Induktionsvoraussetzung: Die Behauptung gelte für obere Dreiecksmatrizen der Größe $(n-1) \times (n-1)$.

Induktionsschritt: Sei $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \in K^{n\times n}$
Berechne die Determinante von A mittels Entwicklung nach der ersten Spalte:(Laplace-Entwicklung)
$\det(A) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\alpha_{i1} \cdot \det(A_{i1}) = (-1)^{1+1}\alpha_{11} \cdot \det \begin{pmatrix} \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$
$\overset{I.V.}{=} \alpha_{11} \cdot \alpha_{22} \cdot ... \cdot \alpha_{\mathrm{nn}}$
$\square$

Bemerkung: Das selbe gilt auch für untere Dreiecksmatrizen(transponierte einer oberen Dreiecksmatrix)

Benutze das Gauß-Jordan-Elim.-Verfahren zur Überführung einer beliebigen Matrix A in eine obere Dreiecksmatrix B.

Frage: Wie verändert sich die Determinante?

Betrachte die Matrizen, die die Gauß-Schritte darstellen.

(E1) Addiere das λ-fache der i-ten Zeile zur j-ten Zeile.(i$\neq$j)
Entsteht A' aus A durch einen Schritt E1, dann gilt.

$$A' = \mathrm{LA}, L = E_n + \lambda E_{\mathrm{ij}} = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} & \leftarrow i - \text{te Zeile} \\ \uparrow j\text{−Spalte} & \end{array}$$

$$\text{Es gilt: LA} = \begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & j & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \lambda & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_i + \lambda a_j \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$\det(A') = \det(\mathrm{LA}) = \det(L) \cdot \det(A) = 1 \cdot \det(A) = A$

(E2) Vertausche die i-te Zeile und die j-te Zeile von A.Dann gilt $A' = \mathrm{LA}$

$$\text{mit } L = \begin{array}{c} \\ i \\ j \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & i & j & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots \\ \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Es gilt: $\det(A') = \det(L) \cdot \det(A) = \det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \det(A) = (-1) \cdot \det(A)$

(E3) Multipliziere eine Zeile mit $\lambda \neq 0$. Für $L = \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, \lambda, 1, \ldots, 1)$
gilt: $A' = \mathrm{LA}$ und damit $\det(A') = \det(L) \cdot \det(A) = \lambda \det(A)$

Also gilt für eine Matrix B, die durch Gauß-Jordan-Verfahren aus A durch t-Schritte der Form E2 entsteht(mit beliebig vielen Schritten der Form E1):

$$\det(A) = (-1)^t \cdot \det(B)$$

Falls B in Zeilenstufenform ist, so berechnet man die Determinante als Produkt der Diagonaleinträge.

<u>Leibnitz-Formel:</u>

$A = (\alpha_{\mathrm{ij}}) \in K^{n\times n}$. Dann gilt: $\det(A) = \sum\limits_{\sigma\in s_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\alpha_{1,\sigma(1)}\cdot\alpha_{2,\sigma(2)}\cdot\ldots\cdot\alpha_{n,\sigma(n)}$

Beispiel: Berechne die Determinante einer 3×3 Matrix:

$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}$

Die Permutationen vons_3 sind:

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}^{+}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}^{-}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}^{-}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{+}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}^{+}$

Damit gilt:$\sigma_1, \ldots, \sigma_6$

$\det(A) = \overbrace{\mathrm{sgn}(\sigma_1)}^{+1}\alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33} - \underset{\alpha_{12}\alpha_{21}\alpha_{33}}{\sigma_2(1)\ \sigma_2(2)\ \sigma_2(3)} - \alpha_{13}\alpha_{32}\alpha_{31} - \alpha_{11}\alpha_{23}\alpha_{32} + \alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{31} + \alpha_{13}\alpha_{21}\alpha_{32}$

<u>Aufgabe:</u> Sei $A \in K^{n\times n}$. Dann gilt:

i) Für $\lambda \in K: \underbrace{\det(\lambda A)}_{=\det(\lambda a_1, \lambda a_2, \ldots, \lambda a_n)} = \lambda^W \det(A)$

ii) Falls A eine Nullzeile hat, dann ist $\det(A) = 0$.

zu ii)

a) Betrachte Leinbnitz-Formel:

$\det(A) = \sum\limits_{\sigma\in s_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\alpha_{1,\sigma(1)}\cdot\alpha_{2,\sigma(2)}\cdot\ldots\cdot\alpha_{n,\sigma(n)} = 0,$

da aus jeder Zeile in jedem Summanden genau ein Koeffizient vorkommt, sind alle Summanden Null, also $\det(A) = 0$

b) Sei die i-te Zeile 0, so ist die Laplace Entwicklung nach der i-ten Zeile:

$\det(A) = \sum\limits_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \underbrace{\alpha_{\mathrm{ij}}}_{=0} \cdot \det(A_{\mathrm{ij}}) = 0$

c) Wenn A eine Nullzeile hat so hat A^{tr} eine Nullspalte.

Damit folgt, $\det(A) = \det(A^{\mathrm{tr}}) = 0 \cdot \det(A^{\mathrm{tr}}) = 0$

d) Falls A eine Nullzeile hat so ist der Rang von A<n und damit $\det(A) = 0$

<u>Satz:</u> $\det(A) \neq 0 \iff \mathrm{rank}(A) = n$

<u>Satz:</u> Wenn Zeilen oder Spalten von A linear abhängig sind, dass ist

$\det(A) = 0$

<u>Berhauptung:</u> Sei $n \geq 2$ und $A \in K^{n \times n}$ mit $A = \begin{pmatrix} A_1 & | & C \\ 0 & | & A_2 \end{pmatrix}$

Dann gilt $\det(A) = \det(A_1) \cdot \det(A_2)$

<u>Beweis:</u> benutze Gauß-Jordan-Verfahren und Konstruiere eine Matrix $B = \begin{pmatrix} B_1 & C' \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}$ mit B_1, B_2 sind obere Dreiecksmatrizen.

Überführe zunächst A_1 mittels Gauß-Jordan-Verfahren in eine obere Dreiecksmatrix B_1. Wenn dazu t_1 vertauschungen nötig waren, gilt: $\det(A_1) = (-1)^{t_1} \det(B_1)$.
Genauso gilt mit passenden Umformungen und t_2 Vertauschungen: $\det(A_2) = (-1)^{t_2} \det(B_2)$.
Wendet man "dieselben" Gauß-Jordan Schritte auf die Teilmatrizen von A an, so erhält man eine Matrix $B = \begin{pmatrix} B_1 & C' \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}$.
Für B gilt aber $\det(B) = \det(B_1) \cdot \det(B_2)$, da B, B_1, B_2 obere Dreiecksmatrizen sind. Daraus folgt: $\det(A) = (-1)^{t_1+t_2} \det(B)$
$= (-1)^{t_1} \det(B_1) \cdot (-1)^{t_2} \det(B_2) = \det(A_1) \cdot \det(A_2)$

Beispiel 6.3 Sei $K = \mathbb{C}$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1+i & 0 \\ i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & i \end{pmatrix} \underset{\text{II+iI}}{\xrightarrow{(E1)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1+i & 0 \\ 0 & 1 & 1-i & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & i \end{pmatrix} \xrightarrow{(E1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1+i & 0 \\ 0 & 1 & 1-i & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1-i & i \end{pmatrix} \xrightarrow{(E2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1+i & 0 \\ 0 & 1 & 1-i & 0 \\ 0 & 0 & 1-i & i \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(E1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1+i & 0 \\ 0 & 1 & 1-i & 0 \\ 0 & 0 & 1-i & i \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(5-i) \end{pmatrix}$$

inverses zu $(1-i) = \frac{1}{2}(1+i)$, letzter Schritt: IV-III·Inv.
$\Rightarrow \det(A) = 1 \cdot 1 \cdot (1-i) \cdot \frac{1}{2}(5-i) \cdot \underbrace{(-1)}_{\text{für } E2} = -\frac{1}{2}(5 - i - 5i - 1)$

$= -\frac{1}{2}(4 - 6i)$

7. Matrixinversion und Adjunkte

Für $A = (\alpha_{ij}) \in K^{n \times n}$ setzte $\alpha^{\#}_{\underset{\uparrow}{ik}} := (-1)^{i+k} \det(A_{\underset{\uparrow}{k,i}})$, für $1 \leq i, k \leq n$

Beachte: die Reihenfolge der Streichung!

<u>Adjunkte</u> von A.

Proposition 7.1 $A \cdot A^{\#} = A^{\#} \cdot A = \det(A) \cdot E_n = \operatorname{diag}(\det(A), \dots, \det(A))$

<u>Bewweis:</u> Der Koeffizient der Matrix $A \cdot A^{\#}$ an der Stelle (i, k) ist:

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \cdot \alpha^{\#}_{jk} = \overset{\text{Laplace von } A' \text{ bzgl. } i-\text{ter Zeile}}{\sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+k} \cdot \alpha_{ij} \cdot \det(A_{k,j})} = \det(A')$$

wobei A' aus der Matrix A entsteht, indem die k-te Zeile durch die i-te ersetzt wird. Hieraus folgt: $\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \cdot \alpha^{\#}_{jk} = \begin{cases} \det(A), \text{falls } i = k \\ 0, \text{falls } i \neq k \end{cases}$

$\square$

Korollar 7.2 Falls $A \in \mathrm{GL}_n K$, dann

$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot A^{\#}$

8. Die Determinantenabbildung aus dem Blickwinkel der Analysis

Wir betrachten $K = \mathbb{R}$.

Proposition 8.1 Die Abbildung

$\det : \mathbb{R}^{n \times n} (= \mathbb{R}^{n^2}) \to \mathbb{R}$ ist diefferenzierbar(insbesondere stetig)

<u>Beweis:</u> Dies folgt aus der Konstruktion der Abbildung det aus der Laplace Entwicklung. Zusammen mit der Tatsache, dass die Projektion $A \mapsto A_{i,k} : \mathbb{R}^{n \times n} \to \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$ eine linear ist und jede lineare Abbildung differenzierbar ist. $\square$

Aus der stetigkeit der Abbildung det folgt:
$\mathrm{GL}_n\mathbb{R} = \det^{-1}(\underbrace{\mathbb{R}\setminus\{0\}}_{\text{offen}})$
ist eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^{n\times n}$.
Aus Korollar 7.2: $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot A^{\#}$
mit $A^{\#} = (\alpha_{ik}^{\#})$ und $\alpha_{ik}^{\#} = (-1)^{i+k}\det(A_{i,k})$. Für jedes Paar (i,k) ist die Abbildung $A \mapsto \frac{1}{\det(A)}\alpha_{ik}^{\#} : \mathrm{GL}_n\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar.

Zusammenfassend ergibt sich:

Proposition 8.2 Die Abbildung $.^{-1} : \mathrm{GL}_n\mathbb{R} \to \mathrm{GL}_n\mathbb{R} : A \mapsto A^{-1}$ ist differenzierbar(und insbesondere stetig).

Bemerkung: analog für $K = \mathbb{C}$.

Wieder speziell $K = \mathbb{R}$.

Bemerkung 8.3 In der Analysis wird das Volumen in $\mathbb{R}^n$ eingeführt. Man zeigt, dass $|\det(A)|$ =Volumen des Parallelotops,
das von den Spalten(oder Zeilen)
von A aufgespannt wird
für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ beliebig.

9. Cramersche Regel

Betrachte das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ (*)
für $A \in K^{n\times n}$ und $b \in K^n$ über beliebigem Körper K.
Bekannt: (*) eindeutig lösbar $\iff A \in \mathrm{GL}_n K \iff \det(A) \neq 0$
Die eindeutige Lösung lässt sich dann schreiben als $x_0 = A^{-1}b$

Sei auch $A \in \mathrm{GL}_n K$ mit Spalten $a_1, \dots, a_n$.
Dann folgt aus Korollar 7.2: $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot A^{\#}$ mit
$\alpha_{ik}^{\#} = (-1)^{i+k} \cdot \det(A_{k,i})$. Anders ausgedrückt:$A^{-1} = (\gamma_{ik})$:

$\gamma_{ik} = \frac{(-1)^{i+k}}{\det(A)} \cdot \det(A_{k,i}) = \frac{1}{\det(A)}\det(a_1, \dots , a_{i-1}, e_k, a_{i+1}, \dots , a_n)$

Sei $x_0 = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \xi_i = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{ik} \cdot b_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{i+k}}{\det(A)}\det(A_{k,i}) \cdot b_k$

$= \frac{1}{\det(A)}\det(a_1, \dots , a_{i-1}, b, a_{i+1}, \dots , a_n)$

Beispiel 9.1 Wir betrachten Abbildungen

$A : [0, 5] \longrightarrow \mathrm{GL}_2\mathbb{R} : t \mapsto \begin{pmatrix} \sin(t) & \frac{1}{10}\sin(t^2) - \frac{12}{10} \\ 1 + t^2 & \cos(t) \end{pmatrix}$

$b : [0]5 \longrightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto \begin{pmatrix} 2t \\ 1 \end{pmatrix}$

$\forall t \in [0, 5] : A_t \in \mathrm{GL}_2\mathbb{R}$, denn:

$\det \begin{pmatrix} \sin(t) & \frac{1}{10}\sin(t^2) - \frac{12}{10} \\ 1 + t^2 & \cos(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\sin(t)\cos(t)}_{\geq -1} + \frac{1}{10}\underbrace{(12 - \sin(t^2))}_{>1}\underbrace{(1 + t^2)}_{\geq 1} > 0$

Sei x_t eindeutige Lösung des LGS $A_t x = b_t$.

$x : [0, 5] \longrightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto x_t$

10. Algorithmische Aspekte

Komplexität Frage: Wie schnell kann man Determinanten berechnen?
Präziser: wieviele arithmetische Operationen in K werden asymptotisch benötigt um die Determinante einer $n \times n$ Matrix über K auszurechnen?

Antworten:

Gauß	Leibnitz	Laplace
$O(n^3)$	$\sum_{\sigma \in \mathrm{Sym}(\{1, \dots , n\})} (-1)^{\mathrm{sgn}(\sigma)} \alpha_{1,\sigma(1)}, \dots , \alpha_{n,\sigma(n)}$	siehe Leibnitz
n – Schritte mit je n^2 Operationen	$n! \in O(n^{\log n})$	

Kapitel 6 Polynome

1. Arithmetik

Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement.

Definition 1.1

i) Ein (abstraktes) Polynom mit Koeffizienten in $\mathbb{R}$ ist eine Abbildung
$p : \mathbb{N} \to R$ mit $\{i \mid p(i) \neq 0\} < \infty$. (abbrechende Folge beliebiger Länge.)

(ii) Die Zahl $\deg(p) := \max\{i \mid p(i) \neq 0\}$ heißt Grad von p, für $p \neq 0$.
$\deg(0) := -\infty$

(iii) Für $p \neq 0$ ist $\mathrm{lc}(p) := p(\deg(p))$ der Leitkoeffizient von p.

Üblich ist die folgende Notation:
Statt $p = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_d, 0, \dots)$ d=deg(p)
schreibt man: $\alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \dots + \alpha_d t^d$
wobei t ein Symbol ist, das im Kontext nicht benutzt wurde
(=Unbestimmte). Via Einbettung $r \mapsto (r, 0, 0, \dots)$ von R in $R[t]$
(=Menge aller Polynome mit Koeffizienten in R mit Unbest. t)
gilt: $R \subset R[t]$.

Auf $R[t]$ lassen sich Arithmetische Operationen $+$ und $\cdot$ definieren:
$p, q \in R[t]$
$p + q : \mathbb{N} \to R : i \mapsto p(i) + q(i)$ punktweise Addition

$$p \cdot q : \mathbb{N} \to R : k \mapsto \sum_{i=0}^{k} \underset{\uparrow \text{arithm. Op. in } R}{p(i) \cdot q(k-i)}$$

In der üblichen Notation: $p = \sum_{i=0}^{d} \alpha_i t^i, q = \sum_{i=0}^{e} \beta_i t^i$

$$p + q = \sum_{i=0}^{\max(d,e)} (\alpha_i + \beta_i) t^i$$

$\deg(p+q) \leq \max\{\deg(p), \deg(q)\}$

$$p \cdot q = \sum_{k=0}^{d+e} \left(\sum_{i=0}^{k} \alpha_i \cdot \beta_{k-i} \right) t^k$$

$\deg(p \cdot q) = \deg(p) + \deg(q)$

Proposition 1.2
Das Tripel $(R[t], +, \cdot)$ ist ein Ring mit kommutativer Multiplikation und Einselement $1 \in R$.

2. Polynome mit Koeffizienten in einem Körper

Sei K ein Körper und t eine Unbestimmte.

Proposition 2.1 Mit der Skalarmultiplikation $\lambda \cdot p : \mathbb{N} \to K : i \mapsto \lambda \cdot p(i)$
$p \in K[t], \lambda \in K$ ist $(K[t], +, \bullet)$ ist ein K-VR.
Da das Einselement aus dem Körper K auch das Einselement in K[t] ist, ist zusätzlich K[t] eine K-Algebra.

Proposition 2.2 Die Polynome $1, t, t^2, ...$ bilden eine K Basis von K[t].
Insbesondere $\dim_K K[t] = \infty$.
<u>Beweis:</u> Jedes Polynom $p = \sum_{i=0}^{d} \alpha_i t^i$ ist eindeutig darstellbar
als Linearkombination von $1, t, t^2, ..., t^d$ $\square$

Proposition 2.3[Division mit Rest]
Zu $a, b \in K[t]$ mit $b \neq 0$ existieren eindeutig $q, r \in K[t]$ mit $a = q \cdot b + r$ (*) und $\deg(r) < \deg(b)$.

<u>Beweis:</u> (konstruktiv) Seien $a, b \in K[t]$ mit $b \neq 0$.
Setze $q_1 := 0, r_1 := a$. $[\Rightarrow q_1 b + r_1 = a]$.
Wir nehmen an, dass für ein $k \geq 1$ gilt: $\deg(r_k) \geq \deg(b)$.
Dann definieren wir induktiv:
$q_{k+1} := \mathrm{lc}(r_k)/\mathrm{lc}(b) \cdot t^{\deg(r_k) - \deg(b)}$
$r_{k+1} := r_k - q_{k+1} b$.

Anschließend wird k um 1 erhöht, und die Schleife fortgesetzt.

Das Verfahren terminiert, weil $\deg(r_{k+1}) < \mathrm{der}(r_k)$.

Induktiv gilt: $\left(\sum\limits_{i=1}^{k+1} q_i\right) b + r_{k+1} = \sum\limits_{i=1}^{k} q_i + q_{k+1} + r_{k+1}$

$= a - r_k + q_{k+1}b + \underbrace{r_{k+1}}_{=-q_{k+1}b} = a$

Für $q := \sum\limits_{i=0}^{k} q_i$ und $r := r_k$ wobei $k = \min\{j \in \mathbb{N} : \deg(r_j) < \deg(k)\}$ gilt (*).

3. Einsetzungsabbildung und Nullstellen

Sei nun wieder R ein Ring (kommutativ&mit Eins).

Zu jedem Polynom $p = \sum\limits_{i=0}^{d} \alpha_i t^i \in R[t]$ existiert eine Abbildung

$$p^\star : R \to R : x \mapsto \sum_{i=0}^{d} \alpha_i x^i$$

die Einsetzungsabbildung(in R).

Beispiel 3.1 Betrachte $p = t^2 - 1 \in \mathbb{R}[t]$. Dann ist:
$p^\star(0) = 0^2 - 1 = -1$
$p^\star(1) = 1^2 - 1 = 0$

Beispiel 3.2 Betrachte $q = t^2 + t \in \mathbb{F}_2[t]$
$q^\star(0) = 0^2 + 0 = 0$
$q^\star(1) = 1^2 + 1 = 0$

Es gilt: $p^\star : \mathbb{F}_2 \to \mathbb{F}_2$ verschwindet identisch.

Bemerkung:
Falls $p \in \mathbb{R}[t]$, dann: $p^\star \to 0 \Rightarrow p = 0$

Beispiel 3.3 Betrachte $p = t^2 + t + 1 \in \mathbb{Q}^{2\times 2}[t]$
(1 ist immer das multiplikative Neutralelement - hier E_2)

$$p^\star\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5 & 4\\ 3 & 2\end{pmatrix}$$

Definition 3.4
Ein Element $x \in R$ heißt <u>Nullstelle</u> von $p \in R[t]$, falls $p^\star(x) = 0$

Satz 3.5
Sei $x \in R$ Nullstelle von $p \in R[t]$. Dann <u>teilt</u> $t - x$ das Polynom p.
<u>Beweis:</u> Wegen $\mathrm{lc}(t - x) = 1$ ist Polynomdivision von $R[t]$ nach Prop. 2.3 möglich. Ohne Einschränkung, sei der Grad von $d = \deg(p) \geq 1$.

$a, b \in R$ a teilt $b :\iff \exists c \in R : \text{ac} = b$
Für $p = \sum\limits_{i=0}^{d} \alpha_i t^i$:

$$(\alpha_d t^d + \alpha_{d-1}t^{d-1} + ... + \alpha_1 t^1 + \alpha_0) : (t - x) = \alpha_d t^{d-1} + (\alpha_{d-1} + x\alpha_d)t^{d-2} + ...$$
$$\underline{-(\alpha_d t^d - x\alpha_d t^{d-1})}$$
$$(\alpha_{d-1} + x\alpha_d)t^{d-1} + \alpha_{d-1}t^{d-2} + ... + \alpha_1 t + \alpha_0$$
$$\underline{-[(\alpha_{d-1} + x\alpha_d)t^{d-1} - (x\alpha_{d-1} + x^2\alpha_d)t^{d-2}]}$$
$$(\alpha_{d-2} + x\alpha_{d-1} + x^2\alpha_d)t^{d-2} + \alpha_{d-3}t^{d-3} + ... + \alpha_1 t + \alpha_0$$

Als Rest ensteht nach d Schritten: $\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + ... + \alpha_d x^d$
$= p^\star(x) = 0$ nach Voraussetzung.

Korollar 3.6 Jedes Polynom vom Grad d hat höchstens d Nullstellen.

<u>Beweis:</u> Seien $x_1, \ldots, x_d$ verschiedene Nullstellen von p
$(d - x_1), (d - x_2), \ldots, (d - x_d)$ teilen p paarweise teilerfremd.
$\Rightarrow \prod\limits_{i=1}^{d+1}(t - x_i)$ teilt p, aber $\deg\left(\prod\limits_{i=1}^{d+1}(t - x_i)\right) = d + 1 > \deg(p)$
-> Widerspruch
$\square$

Beispiel 3.7 $t^2 - 1 \in \mathbb{R}[t]$ Nullstellen: 1,-1: $(t+1)(t-1) = t^2 - 1$

Beispiel 3.8 $t^2 + t \in \mathbb{F}_2$ Nullstellen: 0,1: $t(t+1) = t^2 + t$

Proposition 3.9
Sei K ein beliebiger Körper und $A \in K^{n\times n}$. Dann ist die Abbildung

$$\Phi : K[t] \to K^{n\times n} : p \to p^\star(A)$$

eine Klineare Abbildung und ein Ringisomorphismus(insgesamt
Homomorphismus von K-Algebren)

4. Einsetzungabbildung für Matrizen

Sei K Körper.

Proposition 4.1 Für jede invertierbare Matrix $A \in \mathrm{GL}_n K$ dann existiert
ein Polynom $p = \sum\limits_{i=0}^{d} \alpha_i t^i \in K[t]\ (\subseteq K^{n\times n}[t])$ vom Grad $d < n^2$ mit
$A^{-1} = p^\star(A) = \alpha_0 E_n + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 + \dots + \alpha_d A^d$ und $\alpha_0 \neq 0$.

Bemerkung: Via $\alpha \mapsto \mathrm{diag}(\alpha, \alpha, \dots, \alpha)$ ist $K \subset K^{n\times n}$
$\Rightarrow K[t] \subset K^{n\times n}[t]$

<u>Beweis:</u> Wegen $A(\lambda B + \mu C) = \lambda \mathrm{AB} + \mu \mathrm{AC}\, \forall \lambda, \mu \in K, \forall B, C \in K^{n\times n}$
ist die Abbildung $L_A : K^{n\times n} \to K^{n\times n} : B \mapsto \mathrm{AB}\ K$ linear.
Da $A \in \mathrm{GL}_n K$ ist L_A bijektiv. $(L_A)^{-1} = L_{A^{-1}}$, d.h. $L_A \in \mathrm{GL}(K^{n\times n})$.
Sei $k = \min\{i \in \mathbb{N} \mid (E_n = A^0, A = A^1, A^2, \dots, A^i) \text{ linear abhängig}\} \leq n^2$
Dann existieren $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{k-1} \in K$ mit $A^k = \beta_0 E_n + \beta_1 A + \dots + \beta_{k-1} A^{k-1}$

Dann ist $A^{k+1} = A \cdot A^k = A(\beta_0 E_n + \beta_1 A + \dots + \beta_{k-1} A^{k-1})$
$= \beta_0 A + \beta_1 A^2 + \dots + \beta_{k-1} A^k$
$= \beta_0 A + \beta_1 A^2 + \dots + \beta_{k-2} A^{k-1} + \beta_{k-1}(\beta_0 E_n + \beta_1 A + \dots + \beta_{k-1} A^{k-1}) = \beta_0 \beta_{k-1} E_n + (\beta_0 + \beta_1 \beta_{k-1}) A + \dots + (\beta_{k-1} + \beta_{k-1}\beta_{k-1}) A^{k-1}$

Das bedeutet insbesondere, dass der Unterraum

$$\mathcal{U} := \operatorname{lin}_K\{A^i \mid i \geq 0\}$$

die Folge $(E_n, A, A^2, \dots, A^{k-1})$ als Basis besitzt, $\dim(\mathcal{U}) = k < n^2$.

Nach Konstruktion gilt: $L_A(\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{U} \Rightarrow L_A(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$.
Damit $A^{-1} = L_{A^{-1}}(E_n) \in \mathcal{U}$, und es existieren $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1} \in K$:
$\alpha_0 E_n + \alpha_1 A + \dots + \alpha_{k-1} A^{k-1} = A^{-1}$. $E_n = A \cdot A^{-1} = \alpha_0 A + \alpha_1 A^2 + \dots + \alpha_{k-1} A^k = \alpha_0 A + \alpha_1 A^2 + \dots + \alpha_{k-2} A^{k-1} + \alpha_{k-1}(\beta_0 E_n + \beta_1 A + \dots + \beta_{k-1} A^{k-1})$
$= \underbrace{\beta_0 \alpha_{k-1}}_{=0} E_n + \underbrace{(\alpha_0 + \beta_1 \alpha_{k-1})}_{=0} A + \dots + \underbrace{(\alpha_{k-1} + \beta_{k-1}\alpha_{k-1})}_{=0} A^{k-1}$
$\Rightarrow \alpha_{k-1} \neq 0 \wedge \beta_0 \rightsquigarrow$ betrachte $A = A^2 \cdot A^{-1}$: $\beta_1 \neq 0 \Rightarrow \alpha_0 \neq 0$
□

Beispiel 4.2 Betrachte $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{2\times 2}$ [3 3]

$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\det(A) = -2 \neq 0$

$A^2 - A - 2E_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
$\Rightarrow (E_2, A, A^2)$ linear abhängig
$\Rightarrow U = \operatorname{lin}_{\mathbb{Q}}\{A^k \mid k \in \mathbb{N}\} = \operatorname{lin}_{\mathbb{Q}}(E_2, A)$

Wir erhalten $p = t^2 - t - 2 \in \mathbb{Q}[t] \subset \mathbb{Q}^{2\times 2}[t]$
und $p^\star(A) = A^2 - A - 2E_2 = 0$

5. Interpolation

Satz 5.1 [Lagrange Interpolation] Gegeben sind $x_0, x_1, \dots, x_d \in K$(Stützstellen) paarweise verschieden(!)
und $y_0, y_1, \dots, y_d \in K$(Stützwerte). Dann existiert $p \in K[t]$ mit $\deg(p) \leq d$
und $p^\star(x_i) = y_i \; \forall i \in \{0, 1, \dots, d\}$.

<u>Beweis:</u> betrachte das <u>Lagrange Polynom</u> $L_i = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{d} \frac{t - x_k}{\underbrace{x_i - x_k}_{\in K\setminus\{0\}}} \in K[t]$ vom

Grad d mit $i \in \{0, 1, \dots, d\}$

Es gilt: $L_i^\star(x_k) = \begin{cases} 1, \text{ für } j = i \\ 0, \text{ für } j \neq i \end{cases}$
$= \delta_{i\,j}$ Kronecker Symbol

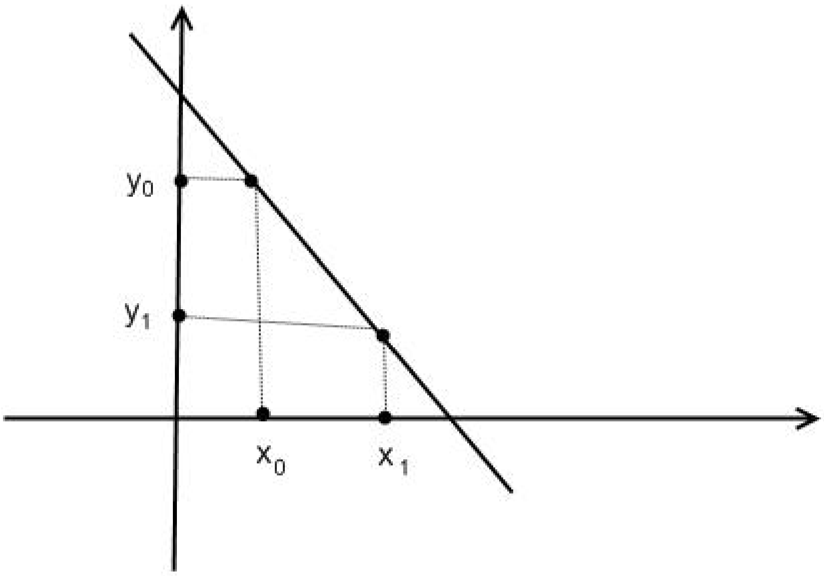
Anschauung Lagrange Polynom
für $k = i \ := \frac{(t-x_0)\cdots(t-x_{i-1})(t-x_{i+1})(t-x_d)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})(x_i-x_d)}$

$p := \sum\limits_{i=0}^{d} y_i L_i \in K[t], \deg(p) \leq d$

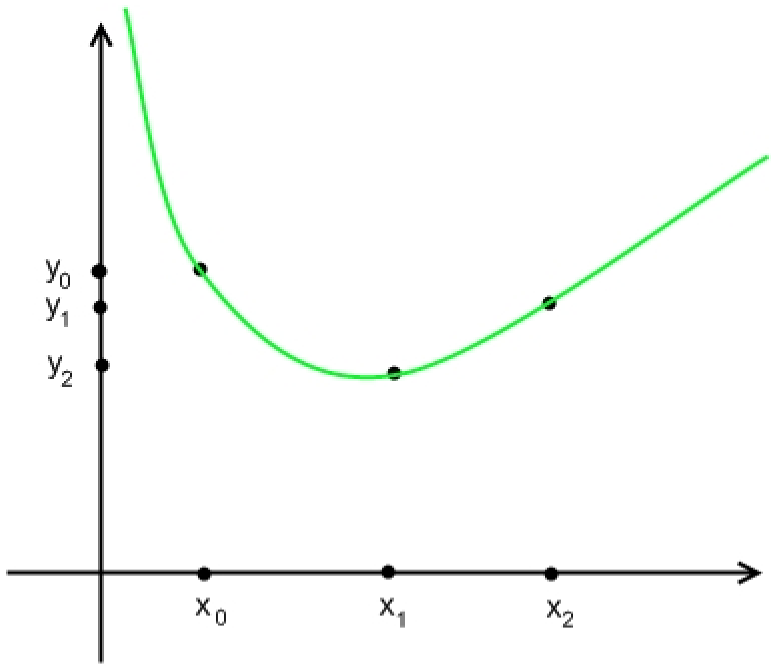
$p^\star(x_j) = \sum\limits_{i=0}^{d} y_i L_i^\star(x_j) = y_j L_j^\star(x_j) = y_j$
Angenommen es existieren $q \in K[t]$ mit $\deg(q) \leq d$ und $q^\star(x_i) = y_i \forall i$
Dafiniere $r := p - q \in K[t]$ mit $\deg(r) \leq d$.
$r^\star(x_i) = p^\star(x_i) - q^\star(x_i) = y_i - y_i = 0$, $\forall i \in \{0, 1, \dots, d\}$

Damit ist jedes x_i, Nullstelle von r, insgesamt $d+1$ paarweise verschiedene Nullstellen.
Falls $r \neq 0$ dann entsteht ein Widerspruch zu Korollar 3.6 $\square$

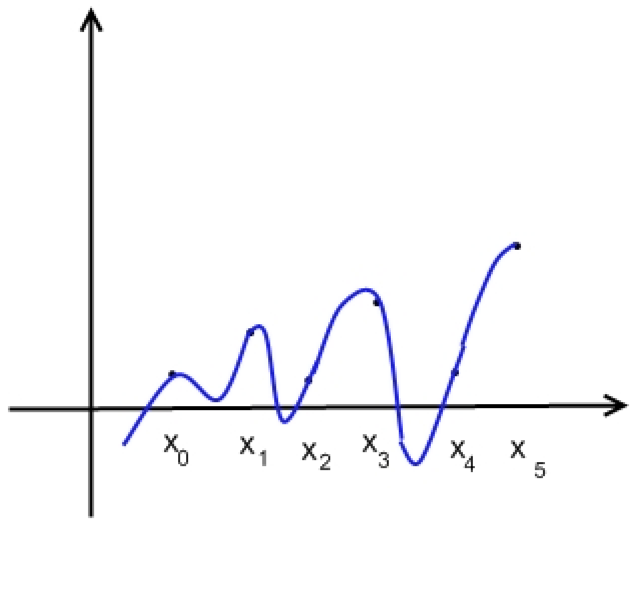
Bemerkung: $[K = \mathbb{R}]$
$d = 1$



Es existiert genau ein Polynom 1. Grades, welches durch die zwei Punkte geht.
Graph des Lagrange Interpolations Polynoms für d=2:



Je mehr Stützstellen, desto mehr Oszilliert das Polynom:



Lagrange Polynom muss nicht die Funktion wiedergeben, von dem die Punkte stammen.

Satz 5.2[Viède-Formeln] $\alpha_d = \mathrm{lc}(p) \neq 0$
Für $p \in K[t]$ vom Grad $d \geq 1$ und $k \in \{1, 2, \dots, d\}$ mit
$p = \sum\limits_{i=0}^{d} \alpha_i t^i = \alpha_d \prod\limits_{i=0}^{d} (t - \beta_i)$
gilt: $\sum\limits_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq d} \beta_{i_1} \beta_{i_2} \cdots \beta_{i_k} = (-1)^{d-k} \alpha_{d-g} / \alpha_d$

<u>Beispiel:</u> $d = 1$
$\alpha_1 T + \alpha_0 = \alpha_1 (t - \beta_1) = \alpha_1 t - \beta_1 \alpha_1$
$\iff \alpha_0 = \alpha_1 \beta_1 \iff \beta_1 = -\alpha_0 / \alpha_1$

$d = 2$
$\alpha_2 t^2 + \alpha_1 t + \alpha_0 = \alpha_2 (t - \beta_1)(t - \beta_2)$
$= \alpha_2 (t^2 - (\beta_1 + \beta_2) t + \beta_1 \beta_2)$
$\iff \alpha_1 = -\alpha_2 (\beta_1 + \beta_2) \wedge \alpha_0 = \alpha_2 \beta_1 \beta_2$
$\iff -\alpha_1 / \alpha_2 = \beta_1 + \beta_2 \wedge \alpha_0 / \alpha_2 = \beta_1 \beta_2$

Beweis Per Induktion nach d
Induktionsanfang: siehe oben.
Induktionsvoraussetzung: Aussage gilt für alle Polynome vom Grad $< d$, und $d \geq 2$.

$$\alpha_d \prod_{i=1}^{d} (t - \beta_i) = \alpha_d (t - \beta_d) \cdot \prod_{i=1}^{d-1} (t - \beta_i)$$
$$= \alpha_d (t - \beta_d) \left[t^{d-1} + \sum_{k=1}^{d-1} (-1)^{d-1-k} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq d-1} \beta_{i_1} \cdots \beta_{i_k} t^{d-1-k} \right]$$
$$= \alpha_d \Bigg((-1)^{d-1} t^d + \sum_{k=1}^{d-1} (-1)^{d-1-k} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq d-1} \beta_{i_1} \cdots \beta_{i_k} t^{d-k} - (-1)^{d-1} \beta_d \, t^{d-1}$$
$$+ \sum_{k=0}^{d} (-1)^{d-k} \beta_d \cdot \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq d-1} \beta_{i_1} \cdots \beta_{i_k} t^{d-1-k} \Bigg)$$
$$= \alpha_d (-1)^{d-1} t^d - \sum_{k=1}^{d} (-1)^{d-k} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq d-1} \beta_{i_1} \cdots \beta_{i_k} t^{d-k} - (-1)^{d-1} \beta_d t^{d-1}$$
$$- \sum_{k=2}^{d} (-1)^{d-k} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_{k-1} \leq d-1} \beta_{i_1} \cdots \beta_{i_k} \beta_d t^{d-k}$$

$$= \alpha_d \Bigg((-1)^{d-1} t^d - (-1)^{d-2} \sum_{i_1=1}^{d} \beta_{i_1} t^{d-1} - \sum_{k=2}^{d-1} (-1)^{d-k} \cdot \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq d-1} \beta_{i_1} \cdots \beta_{i_k} t^{d-k}$$

$$- \sum_{k=2}^{d-1} (-1)^{d-k} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k - 1 \leq d-1} \beta_{i_1} \cdots \beta_{i_k} t^{d-k} - \beta_0 \beta_1 \cdots \beta_d \Bigg)$$

6. Fundamentalsatz der Algebra

Satz 6.1

Jedes Polynom $p \in \mathbb{C}[t]$ mit Grad $\deg(p) = d \geq 1$ zerfällt in Linearfaktoren,
d.h. es ex. $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_d \in \mathbb{C} : p = (t - \beta_1) \cdots (t - \beta_d)$
[$\mathbb{C}$ ist algebraisch abgeschlossen]

Korollar 6.2

Jedes Polynom $p \in \mathbb{R}$ mit $\deg(p) = d \geq 1$ zerfällt in Linearfaktoren und quadratische Faktoren.
$t^2 + 1 \in \mathbb{R}[t]$

Beweis: Aufgefasst als Polynom in
$\mathbb{C}[t] : \exists z_1, \ldots, z_d \in \mathbb{C} : p = (t - z_1) \cdots (t - z_d)$
$\forall i : p^\star(z_i) = 0.$
Sei $q = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i t^i \in \mathbb{C}[t]$, $\overline{q} = \sum_{i=1}^{d} \overline{\alpha_i} t^i \in \mathbb{C}[t] : \overline{q}^\star(\overline{z}) = \overline{q^\star(z)}$
$\Rightarrow p^\star(\overline{z_i}) = \overline{p}^\star(\overline{z_i}) = \overline{p^\star(z_i)} = 0.$
Sei $z \in \mathbb{C}$ Nullstelle von p.
Fall 1: $z \in \mathbb{R} \Rightarrow (t - z)$ teilt p.
Fall 2: $z \notin \mathbb{R} \Rightarrow z \neq \overline{z}$ Nullstelle von $p \Rightarrow (t - z)(t - \overline{z})$ teilt p.
$(t - z)(t - \overline{z}) = t^2 - \underbrace{(z + \overline{z})}_{\in \mathbb{R}} t + \underbrace{z\overline{z}}_{\in \mathbb{R}}$
$\square$

7. Quotientenkörper

Definition 7.1

Ein Ring heißt nullteilerfrei, falls $\forall a, b \in R \setminus \{0\} : ab \neq 0$

Sei im folgenden stets R ein nullteilerfreier kommutativer Ring mit Eins.
$\mathrm{Quot}(R) := R \times (R \setminus \{0\}) /\!\sim$
$(a,b) \sim (c,d) :\iff ad = bc \qquad a,c \in R, b,d \in R \setminus \{0\}$
Beh. $\sim$ ist Äquivalenzrelation:
transitivität : $(a,b) \sim (c,d) \sim (e,f) \Rightarrow ad = bc \wedge cf = de$
zu zeigen: $af = be$
$\Rightarrow adf = bcf = bde \Rightarrow af = be$
[Wir wissen aus ÜA: $ab = ac \Rightarrow b = c$]

$(a,b) + (c,d) := (ad + bc, bd)$
$(a,b) \cdot (c,d) := (ac, bd)$

Proposition 7.2 $(\mathrm{Quot}(R), +, \cdot)$ ist ein Körper, der Quotientenkörper von R.
Notation: Statt $(a,c)_\sim$ schreibe $\frac{a}{c}$ Beispiel: $\mathrm{Quot}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Q}$;
$\mathrm{Quot}(K[t]) = K(t)$ [Körper der rationalen Funktionen über K in t]

8. Exkurs: Multivariate Polynome

Sei K ein Körper mit n paarweise Unbestimmten $t_1, t_2, \ldots, t_n$.
Sei $K[t_1, t_2, \ldots, t_n] := (K[t_1, \ldots, t_{n-1}])[t_n]$ $\qquad - >$ induktiv
der Ring der Multivariaten Polynome mit Koeffizienten in K in
Unbestimmten $t_1, \ldots, t_n$.

Noataion: Für $m \in \mathbb{N}^n$ sei $t^m := \underbrace{t_1^{m_1} \cdot t_2^{m_2} \cdots t_n^{m_n}}_{\text{Monom}}, m = (1,2) \Rightarrow t_1 t_2^2 = t^m$

Lemma 8.1
Die Monome bilden eine K-Basis des K Vektorraums $K[t_1, t_2, \ldots, t_n]$.
Damit hat $p \in K[t_1, t_2, \ldots, t_n]$ eindeutige Darstellung $p = \sum\limits_{m \in \mathbb{N}^n} \alpha_m t^m$ mit
der Eigenschaft: $\#\{m \in \mathbb{N}^n \mid \alpha_m \neq 0\} < \infty$.

Beispiel: $n = 2,\ K = \mathbb{Q}$

$\underbrace{(t_1^2+1)}_{\in\mathbb{Q}[t_1]}t_2^2 + (t_1+\frac{17}{2})t_2 - (t_1^3+t_1^2+2) \in \mathbb{Q}[t_1,t_2] = (K[t_1])[t_2] = (K[t_2])[t_1]$

$\deg_{t_2}(p) = 2$

$= t_1^2t_2^2 + t_2^2 + t_1t_2 + \frac{17}{2}t_2 \underbrace{-t_1^3}_{=-t^{(3,0)}} - t_1^2 - 2 \qquad \in \mathbb{Q}[t_1,t_2]$

$= (-1)t_1^3 + (t_2^2-1)t_1^2 + t_2t_1 + (t_2^2 + \frac{17}{2}t_2)$ $\deg_{t_1}(p) = 3$

$$\operatorname{tdeg}\left(\sum_{m\in\mathbb{N}^2}\alpha_m t^m\right) = \max\{\sum_m \mid \alpha_m \neq 0\}$$

Zu $p \in K[t_1,t_2,\dots,t_n]$ existiert Einsetzungsabbildung.

$$p^\star : K^n \to K : \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \sum_{m\in\mathbb{N}^n} \alpha_m x_1^{m_1}\cdots x_n^{m_n}$$

Definition 8.2 $V(p) = \{x \in K^n : p^\star(x) = 0\}$

Beispiel 8.3 $V(t_1^2+t_2^2-1) \subseteq \mathbb{R}^2$ [Einheitskreis]

Definition 8.4 Das multivariate Polynom

$e_k := \sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le n} t_{i_1}t_{i_2}\cdots t_{i_k} \in K[t_1,\dots,t_n]$

heißt k-tes elementar-symmetrisches Polynom(über K) in n Unbekannten.

Viète-Formeln: Für $\overset{(\text{monisch}) \iff \alpha_d=1}{\text{univariates}}$ $p \in K[s]$ mit $\deg(p) = d \ge 1$ mit

$p = \sum_{i=0}^{d}\alpha_i s^i = (s-\beta_1)\cdots(s-\beta_d)$ gilt:

$e_k^\star(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_d) = (-1)^{d-k}\alpha_k$

Beispiel 8.5 (Stiele) Betrachte $p = (t-u)(t-v)(t-w) \in \underset{\subseteq K(u,v,w)[t]}{\underset{=(K[u,v,w])[t]}{K[u,v,w,t]}}$

[Zitat:nen Körper istn Körper istn Körper]

$K[u,v,w]$ ntf

$K(u,v,w) = \mathrm{Quot}(K[u,v,w])$

Es gelten die Viète-Formeln: $p = t^3 - \underbrace{e_1}_{u+v+w} t^2 + \underbrace{e_2}_{uv+uw+vw} t - \underbrace{e_3}_{uvw}$

$\Rightarrow 0 = p^\star(u) + p^\star(v) + p^\star(w) = (u^3+v^3+w^3) - e_1(u^2+v^2+w^2) + e_2 \underbrace{(u+v+w)}_{e_1} - 3e_3$

$= (u^3+v^3+w^3) - (u+v+w)(u^2+v^2+w^2-uv-uw-vw) - 3(uvw)$

$\Rightarrow u^3+v^3+w^3-3uvw = (u+v+w)(u^2+v^2+w^2-uv-uw-vw)$

Gleichung gilt in $K[u,v,w]$

Speziell z.B. folgt $\forall u,v,w \in \mathbb{Z} : u+v+w = 0 \Rightarrow u^3+v^3+w^3 = 3uvw$