10. Blatt

1

2) **32.1.** $\tilde{g} \sim g \iff \exists h \in H : \tilde{g} = g \cdot h$.

Z.z.: 1) $\sim$ reflexiv, d.h. $\forall g \in G$ gilt $g \sim g$.

2) $\sim$ symmetrisch, d.h. $\forall g, g' \in G$ mit $g \sim g' \Rightarrow g' \sim g$.

3) $\sim$ transitiv, d.h. $\forall g_1, g_2, g_3 \in G$ mit $g_1 \sim g_2$ & $g_2 \sim g_3$ gilt $g_1 \sim g_3$.

zu 1). Aus UG1 und UG2 folgt, dass $e = h \cdot h^{-1} \in H$ ist und damit $g = g \cdot e$, also $g \sim g$.

zu 2) Seien $g_1, g_2 \in G$ mit $g_1 \sim g_2$, d.h. $\exists h \in H$ mit $g_1 = g_2 \cdot h$. Nach UG2 ist $h^{-1} \in H$ und damit $g_1 \cdot h^{-1} = g_2$, also $g_2 \sim g_1$.

zu 3) Seien $g_1, g_2, g_3 \in G$ mit $g_1 \sim g_2$ und $g_2 \sim g_3$, d.h. $\exists h_1, h_2 \in H$ mit $g_1 = g_2 \cdot h_1$ und $g_2 = g_3 \cdot h_2$. Daraus folgt: $g_1 = g_2 \cdot h_1 = g_3 (h_2 \cdot h_1)$. Nach UG1 ist $h_2 \cdot h_1 \in H$, also $g_1 \sim g_3$.

1) **32.2.** Beh.: $[g] = g \cdot H$, d.h.
$\{\tilde{g} \in G \mid \tilde{g} \sim g\} = \{g \cdot h \mid h \in H\}$.

„$\subseteq$": Sei $\tilde{g} \in [g]$, d.h. $\exists h \in H : \tilde{g} = g \cdot h \Rightarrow \tilde{g} \in g \cdot H$

„$\supseteq$": Sei $\tilde{g} \in gH$, d.h. $\exists h \in H : \tilde{g} = g \cdot h \Rightarrow \tilde{g} \sim g \Rightarrow \tilde{g} \in [g]$.

1) **32.3.** Sei $[g_1] = [g_1']$ und $[g_2] = [g_2']$. Zeige
$[g_1] \odot [g_2] = [g_1'] \odot [g_2']$, d.h. $[g_1 \cdot g_2] = [g_1' \cdot g_2']$.
Aus $[g_1] = [g_1']$ und $[g_2] = [g_2']$ folgt $\exists h_1, h_2 \in H$ mit $g_1 = g_1' \cdot h_1$ und $g_2 = g_2' \cdot h_2$

Forts. 32.3. ②

Also gilt:

$$g_1 \cdot g_2 = g_1' h_1 \cdot g_2' h_2$$

Da H Normalteiler ist ex. zu $h_1 g_2'$ ein $h_1' \in H$ mit

$$h_1 \cdot g_2' = g_2' h_1'.$$

Damit folgt: $g_1 \cdot g_2 = g_1' \cdot g_2' \cdot h_1' \cdot h_2$. Nach UG1 ist $h_1' \cdot h_2 \in H$, also $g_1 g_2 \sim g_1' \cdot g_2' \Rightarrow [g_1 g_2] = [g_1' \cdot g_2']$.

② **32.4.** 1) $[e] = H \subseteq G$ ist Elt von G/H, also ist $G/H \neq \emptyset$.

2) Neutrales Element: Sei $[g] \in G/H$, dann gilt:

$$[e] \odot [g] = [e \cdot g] = [g]$$, also ist $[e] \in G/H$

das neutrale Element.

3) Inverse Elemente. Das zu $[g] \in G/H$ inverse Elt ist $[g^{-1}] \in G/H$, denn $[g] \odot [g^{-1}] = [g \cdot g^{-1}] = [e]$.

4) Die Verknüpfung ist assoziativ, da $(G, \cdot)$ assoziativ ist:

Seien $[g_1], [g_2], [g_3] \in G/H$. Dann gilt:

$$([g_1] \odot [g_2]) \odot [g_3] = [(g_1 \cdot g_2) \cdot g_3] = [g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3)] = [g_1] \odot ([g_2] \odot [g_3]).$$

34 (i) A ist invertierbar, wenn $\binom{a}{c}$ und $\binom{b}{d}$ linear unabhängig sind, d.h. die Matrix Rang 2 hat.

Falls $a=0$ ist, hat die Matrix Rang 2 gdw. $b \neq 0$ und $c \neq 0$ ist.

Falls $a \neq 0$ ist folgt ~~aus~~ nach Gauß-Elim-Verf.

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = A'$$

Nun hat die Matrix A' den gleichen Rang wie die Matrix a, da A' durch elem. Zeilenumformungen aus A entstanden ist. Der Rang von A ist also 2 gdw. $ad-bc \neq 0$ ist.

Fasst man beide Fälle zusammen so erhält man, dass A Rang 2 hat gdw. $ad-bc \neq 0$ ist. 2

Berechnung des Inversen mittels Gauß-Jordan-Verf.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} a & c & 1 & 0 \\ b & d & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} a & c & 1 & 0 \\ 0 & ad-bc & -b & a \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} a & c & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-b}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} a & 0 & \frac{ad}{ad-bc} & \frac{-ac}{ad-bc} \\ 0 & 1 & \frac{-b}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & d & -c \\ 0 & 1 & -b & a \end{array}\right) \frac{1}{ad-bc}$$

Test: $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} \frac{1}{ad-bc} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. 2

(ii) $[id_{\mathbb{R}^2}]^{\mathcal{B}_2}_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \left([id_{\mathbb{R}^2}]^{\mathcal{B}_2}_{\mathcal{B}_1}\right)^{-1} = \frac{1}{-3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

$[id_{\mathbb{R}^2}]^{\mathcal{B}_1}_{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

Blatt 12.

Aufg. 39. Sei $n>0$, K ein Körper und $x_1,\dots,x_n \in K$.

(i) Zeige:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & & & \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1\le i<j\le n} (x_j - x_i).$$

Beweis per Induktion:

Induktionsanfang:

Für $n=1$ ist $\det(1) = 1 = \prod_{1\le i<j\le 1}(x_j-x_i)$, da das Produkt auf der rechten Seite leer ist.

ALTERNATIV: Für $n=2$ gilt:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{pmatrix} = x_2 - x_1 = \prod_{1\le i<j\le 2}(x_j - x_i).$$

Induktionsvoraussetzung Für ein $n\in\mathbb{N}$, $n>0$ gilt:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1\le i<j\le n}(x_j - x_i).$$

Induktionsschritt Betrachte die Matrix für $n+1$.

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^n \\ 1 & x_3 & \cdots & x_3^n \\ \vdots & & & \\ 1 & x_{n+1} & \cdots & x_{n+1}^n \end{pmatrix}$$

Idee Benutze Gauß-Jordan-Elimination, um die erste Zeile zu eliminieren. Danach berechne die Determinante durch Laplace-Entwicklung nach der 1ten Zeile.

Forts. Gauß-Jordan-Elimination (GJE)

Bisher hatten wir GJE auf Zeilenumformungen beschränkt, da aber für beliebige Matrizen $A \in K^{n \times n}$ gilt $\det A = \det A^{tr}$, können wir auch Spaltenumformungen durchführen.

Subtrahiert man von der $(j+1)$-ten Spalte das x_1-fache der j-ten Spalte nacheinander für $j = n-1, \dots, 1$, so erhält man:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \cdots & x_3^n \\ \vdots & & & & \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \cdots & x_{n+1}^n \end{pmatrix} \overset{n \text{ Gauß-Schritte}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1 x_2 & \cdots & x_2^n - x_2^{n-1} x_1 \\ 1 & x_3 - x_1 & x_3^2 - x_1 x_3 & \cdots & \\ \vdots & & & & \\ 1 & x_{n+1} - x_1 & x_{n+1}^2 - x_{n+1} x_1 & \cdots & x_{n+1}^n - x_{n+1}^{n-1} x_1 \end{pmatrix}$$

Die Determinante bleibt dabei unverändert und man erhält durch Laplace-Entwicklung:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n+1} & \cdots & x_{n+1}^n \end{pmatrix} = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_2^2 - x_2 x_1 & \cdots & x_2^n - x_2^{n-1} x_1 \\ x_3 - x_1 & x_3^2 - x_3 x_1 & \cdots & x_3^n - x_3^{n-1} x_1 \\ \vdots & & & \\ x_{n+1} - x_1 & x_{n+1}^2 - x_{n+1} x_1 & \cdots & x_{n+1}^n - x_{n+1}^{n-1} x_1 \end{pmatrix}.$$

Nun kann man aus der i-ten Zeile den Faktor $(x_{i+1} - x_1)$ herausziehen:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & & & \\ 1 & x_{n+1} & \cdots & x_{n+1}^n \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{n} (x_{i+1} - x_1) \det \begin{pmatrix} 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & \cdots & x_3^{n-1} \\ \vdots & & & \\ 1 & x_{n+1} & \cdots & x_{n+1}^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Nach Ind.Vor. folgt daraus:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n+1} & \cdots & x_{n+1}^n \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{n} (x_{i+1} - x_1) \cdot \prod_{2 \le i < j \le n+1} (x_j - x_i)$$

$$= \prod_{1 \le i < j \le n+1} (x_j - x_i) \qquad \boxtimes$$

39 (ii) Ein beliebige Polynom $f \in \mathbb{R}[x]$ von Grad $n-1$ hat die Form:

$$f(x) = a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1}.$$

mit $a_i \in \mathbb{R}$ für $i = 0, \ldots, n-1$. Für alle Punkte (x_j, y_j) für $j = 1, \ldots, n$ muss dann gelten:

$$y_j = a_0 + a_1 x_j^1 + a_2 x_j^2 + \ldots + a_{n-1} x_j^{n-1} \quad (j \in \{1, \ldots, n\})$$

Diese Gleichungen bilden zusammen das folgende lineare Gleichungssystem:

$$(LGS) \quad \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ \vdots & & & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Dieses LGS hat nach Satz 5.4.3. eine eindeutige Lsg. falls die Determinante der Matrix V_n mit

$$V_n = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \ldots & x_1^{n-1} \\ \vdots & & & \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

nicht Null ist. Nach Aufgabenteil (i) ist aber

$$\det V_n = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i)$$

Da nach Voraussetzung $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$ ist, ist $\det V_n \neq 0$.

Also gibt es eine eindeutige Lsg. $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ für das LGS. Diese liefert dann das eindeutige Polynom.

Aufg. 40 (i)

Sei S_n die symmetrische Gruppe und $\tau \in S_n$. Zerlege S_n in die geraden und die ungeraden Permutationen A_n und A_n'. Behauptung: Die Abbildung $\varphi_\tau : A_n \to A_n'$, $\varphi_\tau(\sigma) = \tau \circ \sigma$ ist bijektiv.

z.z.: i) $\varphi_\tau(A_n) \subseteq A_n'$

ii) φ_τ injektiv, d.h. $\forall \sigma, \sigma' \in A_n : \varphi_\tau(\sigma) = \varphi_\tau(\sigma') \Rightarrow \sigma = \sigma'$.

iii) φ_τ surjektiv, d.h. $\forall \sigma \in A_n' \; \exists \pi \in A_n : \varphi_\tau(\pi) = \sigma$.

Beweis: zu i) Sei $\sigma \in A_n$ eine gerade Permutation. Dann gilt $\operatorname{sgn}(\varphi_\tau(\sigma)) = \operatorname{sgn}(\tau \circ \sigma) = \operatorname{sgn}(\tau) \cdot \operatorname{sgn}(\sigma) = -\operatorname{sgn}(\sigma)$.
Also $\operatorname{sgn}(\varphi_\tau(\sigma)) = -1$, da $\operatorname{sgn}(\sigma) = +1$ und damit
$\varphi_\tau(\sigma) \in A_n' \; \forall \sigma \in A_n$.

zu ii) Seien $\sigma, \sigma' \in A_n$ mit $\varphi_\tau(\sigma) = \varphi_\tau(\sigma')$. Dann folgt:

$$\tau \circ \sigma = \tau \circ \sigma' \Rightarrow \tau^{-1} \circ \tau \circ \sigma = \tau^{-1} \circ \tau \circ \sigma'$$
$$\Rightarrow \sigma = \sigma'.$$

Also ist φ_τ injektiv.

zu iii) Sei $\sigma \in A_n'$. Dann $\tau \circ \sigma \in A_n$ und ausserdem

$$\varphi_\tau(\tau \circ \sigma) = \tau \circ \tau \circ \sigma = \sigma.$$

Also ist φ_τ surjektiv.

Aufg 40 (ii). Es gibt natürlich mehrere Beweismöglichkeiten. Wir zeigen, dass durch die Leibniz-Formel einen (1) normierte (2) alternierende (3) Multilinearform gegeben ist. Aus Satz 5.2.8. folgt dann, dass dies die Determinante ist.

Beweis:

zu (1) Für die Einheitsmatrix E_n gilt:

$$D(E_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n}$$

$$= +1 \cdot a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn} = 1,$$

da alle anderen Summanden mindestens eine 0 im Produkt enthalten. Also ist D normiert.

zu (2) Betrachte eine Matrix $A = (a_1 \dots b \dots b \dots a_n)$ mit zwei identischen Spalten $a_i = a_j = b$ für $i \neq j$. Dann gilt:

$$D(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n}$$

$$= \sum_{\sigma \in A_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n} + \sum_{\sigma \in A_n'} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n}$$

$$= \sum_{\sigma \in A_n} a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n} - \sum_{\sigma \in A_n'} a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n}.$$

Zu jeder geraden Permutation $\sigma \in A_n$ gibt es genau eine ungerade Permutation $\sigma' \in A_n'$ mit:

$$\sigma'(i) = \sigma(j),\ \sigma'(j) = \sigma(i) \text{ und } \sigma'(k) = \sigma(k)\ \forall k \notin \{i,j\}$$

Da $\sigma' = \sigma \circ \tau_{ij}$ ist, ist $\sigma' \in A_n'$. Da nun aber die i-te und die j-te Spalte identisch sind, gilt:

$$D(A) = \sum_{\sigma \in A_n} a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n} - \sum_{\sigma' \in A_n'} a_{\sigma'(1)1} \cdots a_{\sigma'(n)n} = 0.$$

~~Forts.~~ Aufg. 40

zu **(3)** Seien $\lambda, \mu \in K$ und $a_i, b_i \in K^n$. Dann gilt

$$D(a_1, \dots, a_{i-1}, \lambda a_i + \mu b_i, a_{i+1}, \dots, a_n)$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{\sigma(1)1} \cdot \ldots \cdot a_{\sigma(i)i} (\lambda a_i + \mu b_i)_{\sigma(i)i}\, a_{\sigma(i+1)i+1} \cdot \ldots \cdot a_{\sigma(n)n}$$

$$= \lambda \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{\sigma(1)1} \cdot \ldots \cdot a_{\sigma(n)n} + \mu \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{\sigma(1)1} \cdot \ldots \cdot b_{\sigma(i)i} \cdots a_{\sigma(n)n}$$

$$= \lambda D(a_1, \dots, a_n) + \mu D(a_1, \dots, a_{i-1}, b_i, a_{i+1}, \dots, a_n).$$

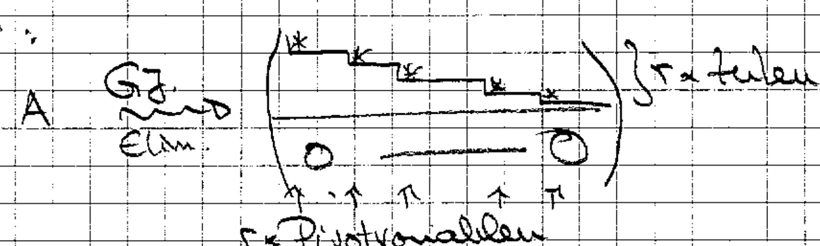
Aufg 41.

(a) $\Rightarrow$ (b): Sei A eine $(m\times n)$-Matrix mit Rang r.

Zu zeigen: 1) Es existiert eine Teilmatrix $A' \in K^{r\times r}$ mit $\det A' \neq 0$.

2) Für alle Teilmatrizen $A'' \in K^{s\times s}$ mit $s>r$ gilt $\det A'' = 0$.

Beweis 1) Bringt man die Matrix A mittels Gauß-Jordan-Elimination in Zeilenstufenform B, so hat die Matrix B r Zeilen und r Pivotvariablen, da $\operatorname{rank} A = r$:



Löscht man nun alle Nicht-Pivotvariablen und alle Nullzeilen, so erhält man eine $(r\times r)$-Teilmatrix B' mit $\det B' \neq 0$. Wir erhalten eine entsprechende Teilmatrix A' von A mit $A' \in K^{r\times r}$. Diese Matrix hat ebenfalls Determinante ungleich Null, da sie durch GJ-Elim. in B' überführt werden kann.

Beweis 2) Sei $A'' \in K^{s\times s}$ mit $s>r$ eine Teilmatrix von A. Da $\operatorname{rank} A = r < s$ ist, sind beliebige s Zeilen linear abhängig. Daher sind auch die Zeilen von A'' linear abhängig, da die Einschränkung auf s Spalten die Abhängigkeit nicht beeinflusst. Daraus folgt: $\det A'' = 0$ mit Satz... .

Aufg 41 (Forts.)

<u>(b) $\Rightarrow$ (a)</u> Sei $A' \in K^{r \times r}$ eine Teilmatrix von A mit $\det A' \neq 0$. Dann sind die Zeilen von A' linear unabhängig. Daraus folgt, dass auch die entsprechenden (längeren) Zeilen von A linear unabhängig sind, also $\operatorname{rank} A \geq r$.

Angenommen $\operatorname{rank} A = s > r$ und $\det A'' = 0$ für alle Teilmatrizen $A'' \in K^{s \times s}$ mit $s > r$.
Laut (a) $\Rightarrow$ (b) gibt es eine Teilmatrix $\tilde{A}$ der Größe $(\operatorname{rank} A) \times (\operatorname{rank} A)$ mit $\det \tilde{A} \neq 0$. Dies ist ein Widerspruch zur Behauptung, dass $\det A'' = 0$ für alle Teilmatrizen $A'' \in K^{s \times s}$.
Also gilt $\operatorname{rank} A \leq r$.

Insgesamt erhält man $r \leq \operatorname{rank} A \leq r$, also

$$\operatorname{rank} A = r.$$

Da (a) $\Rightarrow$ (b) und (b) $\Rightarrow$ (a) sind die Aussagen (a) und (b) äquivalent.