

## Probetest

Name: \_\_\_\_\_ Vorname: \_\_\_\_\_

Matr.-Nr.: \_\_\_\_\_ Tutorium: \_\_\_\_\_

Studiengang: \_\_\_\_\_

Für diesen Test sind **keine** Hilfsmittel erlaubt. Die Lösungen zur 3., 4. und 5. Aufgabe bitte auf diesem Blatt, die anderen Lösungen bitte lesbar auf separate Blätter eintragen. Es gibt insgesamt 20 Punkte. Der Test ist bestanden, wenn insgesamt mindestens 10 Punkte erreicht sind. Dabei müssen in Aufg. 1 bis Aufg. 5 insgesamt mindestens 5 Punkte und in Aufg. 6 und Aufg. 7 insgesamt mindestens 5 Punkte erreicht werden.

Aufgabe	1	2	3	4	5	$\sum_{1-5}$	6	7	$\sum_{6,7}$	$\Sigma$
Punkte										

### Definitionen

Gib zu den folgenden Begriffen eine vollständige Definition an. Dabei müssen **alle** Voraussetzungen formuliert werden; gib z.B. zu jeder Variablen die Menge an, aus der sie stammt.

**Aufgabe 1:** Definiere „Körper“.

(Der Begriff der *Gruppe* darf in dieser Aufgabe als bekannt vorausgesetzt werden.)

**2 Punkte**

**Aufgabe 2:** Definiere „Vektorraum“.

(Die Begriffe *Gruppe* und *Körper* dürfen in dieser Aufgabe als bekannt vorausgesetzt werden.)

**2 Punkte**

### Aussagen

Kreuze in der 3., 4. und 5. Aufgabe die richtige Antwort auf die jeweilige Frage an. Es gibt jeweils einen 1 Pluspunkt pro Teilaufgabe (wenn die Antwort richtig ist) und 1 Punkt Abzug, falls die Antwort falsch ist. Es können jedoch keine negativen Gesamtpunktzahlen pro Aufgabe entstehen. Es muss nicht unbedingt etwas angekreuzt werden.

**Aufgabe 3:** Kreuze jeweils an, ob die Menge und zugehörige Verknüpfung eine Gruppe oder keine Gruppe bildet.

- |  | Gruppe                   | keine Gruppe             |
|--|--------------------------|--------------------------|
| (a) $(\{q \in \mathbb{Q} \mid q > 0\}, \cdot)$                                       | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| (b) $(\text{End}_K(V), \circ)$ , wobei $V$ ein Vektorraum über einem Körper $K$ ist. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**2 Punkte**

**Aufgabe 4:** Kreuze jeweils an, ob die Menge ein Untervektorraum (UVR) oder kein Untervektorraum des  $\mathbb{R}^3$  über dem Körper  $K = \mathbb{R}$  ist.

	UVR	kein UVR
(a) $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ mit } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(b) $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid -\frac{x_1}{2x_1} + \frac{3x_2}{x_2} - 2x_3 = 0 \right\}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**2 Punkte**

**Aufgabe 5:** Kreuze jeweils an, ob die Aussage richtig oder falsch ist.

	richtig	falsch
(a) Sei $\sim$ eine Relation auf einer nichtleeren Menge $M$ . Falls $\sim$ symmetrisch und transitiv ist, so ist $\sim$ stets auch reflexiv.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(b) Seien $V, W$ zwei $K$ -Vektorräume und $f : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung. Seien $v_1, \dots, v_n$ Vektoren aus $V$ . Falls $\text{lin}\{f(v_1), \dots, f(v_n)\} = W$ ist, so ist $\text{lin}\{v_1, \dots, v_n\} = V$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**2 Punkte**

## Aufgaben

Die Rechnungen und Beweise sind (wie üblich) auszuformulieren, d.h. zu begründen, zu kommentieren und alle benutzten Symbole zu erklären.

**Aufgabe 6:** Beweise:

- a) Seien  $\{v_1, v_2\} \subset V$  linear unabhängig in einem beliebigen  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $V$ . Dann sind auch  $\{v_1 + v_2, v_1 - v_2\}$  linear unabhängig.
- b) Sei  $\mathcal{B} = \{b_1, b_2\}$  eine Basis von  $V$ . Sei weiter  $f : V \rightarrow V$  eine lineare Abbildung mit  $f(b_1) = b_1 + b_2$  und  $f(b_2) = b_1 - b_2$ . Dann ist  $f$  bijektiv.

**4 Punkte**

**Aufgabe 7:** Seien  $U, V$  und  $W$  Vektorräume über dem selben Körper  $K$  und  $f : U \rightarrow V$  und  $g : V \rightarrow W$  zwei lineare Abbildungen. Beweise:

1.  $\ker(f) \subseteq \ker(g \circ f)$ , und
2.  $\ker(f) = \ker(g \circ f) \iff \ker(g) \cap \text{img}(f) = \{0\}$ .

**2+4 Punkte**