Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Michael Joswig
Thilo Rörig

Probelösung

Aufgabe 1: Eine Menge K zusammen mit zwei Verknüpfungen $+ : K \times K \to K$ und $\cdot : K \times K \to K$ heisst *Körper*, falls:

a) $(K, +)$ eine abelsche Gruppe ist,

b) $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ eine abelsche Gruppe ist, wobei 0 das neutrale Element der Gruppe $(K, +)$ ist und

c) die folgenden Distributivgesetze für alle $a, b, c \in K$ gelten:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \qquad \text{und} \qquad (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c.$$

2 Punkte

Aufgabe 2: Sei K ein Körper. Ein K-*Vektorraum* (oder *Vektorraum* über K) ist ein Tupel $(V, +, \cdot)$ bestehend aus einer Menge V, einer binären Verknüpfung (*Addition*)

$$+ : V \times V \to V$$

sowie einer *Skalarmultiplikation*

$$\cdot : K \times V \to V,$$

so dass gilt:

1. $(V, +)$ ist eine kommutative Gruppe.
2. $\forall v, w \in V : \forall \lambda, \mu \in K :$
   (a) $(\lambda + \mu) \cdot v = (\lambda \cdot v) + (\mu \cdot v)$
   (b) $\lambda \cdot (v + w) = (\lambda \cdot v) + (\mu \cdot w)$
   (c) $\lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda \cdot \mu) \cdot v$
   (d) $1 \cdot v = v$

2 Punkte

Bewertung:

- Es gibt halbe Punkte.
- 0 *Punkte:* Verstehe ich überhaupt nicht. Es ist nicht zu erkennen, dass der Begriff bekannt ist.
- $\frac{1}{2}$ *Punkt:* Ein geringer Teil der Definition ist richtig.
- 1 *Punkt:* Ein wesentlicher Teil der Definition fehlt.
- $\frac{3}{2}$ *Punkte:* Die Definition ist vollständig, es sind aber z.B. nicht alle Symbole eingeführt worden.
- 2 *Punkte:* Alles richtig.

Aussagen

Aufgabe 3:

(a) $(\{q \in \mathbb{Q} \mid q > 0\},\ \cdot)$ ist eine **Gruppe**.

(b) $(\mathrm{End}_K(V), \circ)$ ist **keine Gruppe**, da nicht alle Endomorphismen bijektiv sind und somit auch nicht immer Inverse existieren.

2 Punkte

Aufgabe 4: Kreuze jeweils an, ob die Menge ein Untervektorraum (UVR) oder kein Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$ über dem Körper $K = \mathbb{R}$ ist.

(a) $\{ \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 \mid \exists\ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ mit } \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) + \lambda \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + \mu \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \}$ ist ein **UVR**, da die Menge den Nullvektor enthält, also gleich $\mathrm{lin}\{\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\}$ ist.

(b) $\{ \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{smallmatrix} x_1 & + 3x_2 & - 2x_3 & = 0 \\ -2x_1 & + x_2 & & = 0 \end{smallmatrix} \}$ ist ein **UVR**, da es die Lösungsmenge eines homogenen linearen Gleichungssystems ist.

2 Punkte

Aufgabe 5: Kreuze jeweils an, ob die Aussage richtig oder falsch ist.

(a) **falsch.** Sei $x \in M$. Falls es ein $y \in M$ gibt mit $x \sim y$, dann folgt aus der Symmetrie, dass auch $y \sim x$. Also folgt mittels Transitivität aus $x \sim y$ und $y \sim x$, dass $x \sim x$ für alle $x \in M$ für die es ein $y \in M$ gibt mit $x \sim y$. Da aber nicht alle $x \in M$ mit einem $y \in M$ in Relation stehen müssen, ist die Aussage falsch. Z.B. Sei $M = \{a, b\}$ und $a \sim a$, aber $a \not\sim b$. Dann ist $\sim$ symmetrisch und transitiv, aber nicht reflexiv.

(b) **falsch.** Betrachte die Vektorräume $V = \mathbb{R}$ und $W = \{0\}$ und die Abbildung $f(x) = 0$. Wenn man nun $v_1 = 0$ wählt, so gilt $\mathrm{lin}\{f(v_0)\} = \{0\} = W$, aber $\mathrm{lin}\{v_0\} = 0 \neq \mathbb{R}$.

2 Punkte

Aufgaben

Es gibt natürlich immer verschiedene Lösungsmöglichkeiten. Ich habe für jede Aufgabe eine ausgewählt. Jede andere richtige Lösung gibt natürlich auch Punkte.

Aufgabe 6:

a) Seien $\{v_1, v_2\} \subset V$ linear unabhängig in einem beliebigen $\mathbb{R}$-Vektorraum V. Dann sind auch $\{v_1 + v_2, v_1 - v_2\}$ linear unabhängig.

Beweis. Zu zeigen: $\{v_1 + v_2, v_1 - v_2\}$ sind linear unabhängig. Seien $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mit:

$$\begin{aligned} & \lambda(v_1 + v_2) + \mu(v_1 - v_2) = 0 \\ \Leftrightarrow \qquad & (\lambda + \mu)v_1 + (\lambda - \mu)v_2 = 0. \end{aligned}$$

Nach Vorraussetzung sind v_1 und v_2 linear unabhängig, also folgt daraus:

$$\lambda + \mu = 0 \qquad \text{und} \qquad \lambda - \mu = 0.$$

Durch Addition der beiden Gleichungen erhält man $2\lambda = 0$, also $\lambda = 0$. Nun setzt man $\lambda = 0$ in eine der beiden Gleichungen ein und erhält $\mu = 0$. Also sind $\{v_1 + v_2, v_1 - v_2\}$ linear unabhängig. □

b) Sei $\mathcal{B} = \{b_1, b_2\}$ eine Basis von V. Sei weiter $f : V \to V$ eine lineare Abbildung mit $f(b_1) = b_1 + b_2$ und $f(b_2) = b_1 - b_2$. Dann ist f bijektiv.

Beweis. Aus der Vorlesung wissen wir, dass f bijektiv ist, wenn f eine Basis von V auf eine Basis von V abbildet. Die Dimension von V ist 2, da $\{b_1, b_2\}$ eine Basis von V ist. Ausserdem sind b_1 und b_2 linear unabhängig und mit Aufgabenteil a) folgt also, dass $b_1 + b_2$ und $b_1 - b_2$ linear unabhängig sind. Damit ist $\{b_1 + b_2, b_1 - b_2\}$ eine Basis von V und f bijektiv. □

4 Punkte

Aufgabe 7: Seien U, V und W Vektorräume über dem selben Körper K und $f : U \to V$ und $g : V \to W$ zwei lineare Abbildungen. Beweise:

1. $\ker(f) \subseteq \ker(g \circ f)$, und
2. $\ker(f) = \ker(g \circ f) \quad \Leftrightarrow \quad \ker(g) \cap \operatorname{img}(f) = \{0\}$.

Beweis 1. Sei $v \in \ker(f)$, d.h. $f(v) = 0$. Dann gilt:

$$(g \circ f)(v) = g(\, f(v)\,) = g(0) = 0.$$

Also ist $v \in \ker(g \circ f)$.

Beweis 2. Wir müssen zwei Richtungen beweisen:

„$\Rightarrow$“: Vorraussetzung: $\ker(f) = \ker(g \circ f)$.

Sei $v \in \ker(g) \cap \operatorname{img}(f)$. Zu zeigen: $v = 0$.

Da v sowohl in $\ker(g)$ als auch in $\operatorname{img}(f)$ liegt, gilt $g(v) = 0$ und es existiert ein $u \in U$ mit $f(u) = v$.

Nun gilt $g(f(u)) = g(v) = 0$, also gilt $u \in \ker(g \circ f)$. Da aber nach Vorraussetzung $\ker(f) = \ker(g \circ f)$ ist, ist $u \in \ker(f)$. Damit folgt $v = f(u) = 0$, also $v = 0$.

„$\Leftarrow$“: Vorraussetzung: $\ker(g) \cap \operatorname{img}(f) = \{0\}$.

Aus Aufgabenteil 7.1 folgt, dass $\ker(f) \subseteq \ker(g \circ f)$. Es bleibt also zu zeigen, dass $\ker(g \circ f) \subseteq \ker(f)$.

Sei $u \in \ker(g \circ f)$, d.h. $(g \circ f)(u) = g(f(u)) = 0$. Zu zeigen: $u \in \ker(f)$, d.h. $f(u) = 0$.

Der Vektor $f(u)$ liegt sowohl im Bild $\operatorname{img}(f)$ von f, also auch im Kern $\ker(g)$ von g. Also gilt $f(u) \in \ker(g) \cap \operatorname{img}(f)$. Nach Vorraussetzung enthält dieser Schnitt nur die 0, also ist $f(u) = 0$.

Also liegt $u \in \ker(f)$.

2+4 Punkte