Der Revidierte Simplex-Algorithmus

Phase II des Simplex-Algorithmus

Input: • Basis B mit Tableau

$$X = \begin{array}{c|c} -z & c - c_B^T B^{-1} A \\ \hline B^{-1} b & B^{-1} A \end{array}$$

Eine Iteration:

① Wähle Nicht-Basis-Spalte s mit $\bar{c}_s < 0$

② Finde Pivotelement x_{rs} mit

$$r = \underset{i=1,\dots,m}{\arg\min} \left\{ \frac{x_{i0}}{x_{is}} \right\}$$

③ Aktualisiere Tableau:

$$x'_{rj} := \frac{x_{rj}}{x_{rs}}$$

$$x'_{ij} := x_{is} - x'_{rs} x_{ij} \qquad i \neq r$$

④ Aktualisiere Basis

Idee: • Verwalte nur Informationen, die wirklich benötigt werden

zu (1): • B liefert NB-Spalten

• $\bar{c}_s = \boxed{c_s} - \underbrace{c_B^T B^{-1}}_{\boxed{\pi}} \boxed{A_s}$

zu (2): • $x_s = \boxed{B^{-1}} \boxed{A_s}$

• brauche immer $x_0 = \overbrace{B^{-1} b}^{\boxed{b'}}$

zu (3): aktualisiere nur $\boxed{b'}, \boxed{\pi}, \boxed{B^{-1}}$ und Formel wie gehabt

(4) trivial

$\Rightarrow$ Verwaltung von $A, b, c, B^{-1}, B^{-1}b, \pi$

$\Rightarrow$

$-z$	$-\pi = -c_B^T B^{-1}$
$b' = B^{-1} b$	B^{-1}

„CARRY"

	c^T
b	A

Iteration des revidierten Simplex-Verfahrens:

1. Berechne verschiedene $\overline{c_s} = c_s - \pi^T A_s$, $s \notin B$, bis negatives gefunden

2. • Berechne $X_s = B^{-1} A_s$

   • $r = \underset{i=1,\dots,m}{\operatorname{argmin}} \left\{ \frac{b'_i}{x_{is}} \right\}$

3. • Führe die Zeilenoperation auf Carry aus, die notwendig sind, um X_s zu Einheitsvektor e_r zu machen.

4. Setze $B := (B \setminus \{r\}) \cup \{s\}$

Motzkins Transpositionstheorem

Variante Farkas-Lemma:

$\exists x \; Ax \leq b \iff y \geq 0, \; y^T A_j = 0 \; \forall j \Rightarrow y^T b \geq 0$

Beweis: Sei $A' := \begin{pmatrix} I \mid \overset{\text{"}A^+\text{"}}{A} \mid \overset{\text{"}A^-\text{"}}{-A} \end{pmatrix}$

$\exists x : Ax \leq b \iff \exists x' \geq 0 : A'x' = b$

d.h. $b \in \operatorname{cone}\{A'_j \mid i = 1, \ldots, 2n+m\}$

$\underset{(\text{Farkas})}{\iff} \; y^T A'_j \geq 0 \; \forall j \Rightarrow y^T b \geq 0 \; \forall y$

$\iff y^T A^+_j \geq 0, \; y^T A^-_j \geq 0 \quad \forall j$
$y^T e_i \geq 0, \; \forall i$

$\iff y^T A_j = 0 \; \forall j \Rightarrow y^T b \geq 0$
$y \geq 0$

$\square$

Satz (Motzkin):

$Ax < b,\ Bx \le c$ lösbar

$\Longleftrightarrow$ (i) $y, z \ge 0,\ y^T A + z^T B = 0 \Rightarrow y^T b + z^T c \ge 0$
und
(ii) $y, z \ge 0,\ y^T A + z^T B = 0,\ y \ne 0 \Rightarrow y^T b + z^T c > 0$

Aufgabe 17 sind Spezialfälle dieses Satzes:

Gordan: $Ax < 0$ unlösbar $\Longleftrightarrow y^T A = 0,\ y \ge 0,\ y \ne 0$ lösbar

Satz mit $B = 0,\ b = 0,\ c = 0$:

$Ax < 0$ lösbar $\overset{(ii)}{\Longleftrightarrow}$ $y \ge 0,\ yA = 0,\ y \ne 0$
$\Rightarrow 0 > 0$ ↯
$\Rightarrow \nexists\ y \ge 0,\ y \ne 0,\ yA = 0.$

d.h. $Ax < 0$ unlösbar $\Longleftrightarrow \exists\ y \ge 0 : yA = 0,\ y \ne 0.$

Ville: $Ax < 0,\ x \ge 0$ unlösbar $\Longleftrightarrow y^T A \ge 0,\ y \ge 0,\ y \ne 0$ lösbar

Satz mit $B = -I,\ b = 0,\ c = 0$:

$Ax < 0,\ x \ge 0$ lösbar $\Longleftrightarrow y, z \ge 0,\ y \ne 0,\ yA + zB = 0$

$\Longleftrightarrow\ y \ge 0,\ y \ne 0 : y^T A \ge 0 \Rightarrow 0 > 0$ ↯
$\Longleftrightarrow \nexists\ y \ge 0,\ y \ne 0 : y^T A \ge 0$

d.h. $Ax < 0,\ x \ge 0$ unlösbar $\Longleftrightarrow \exists\ y \ge 0,\ y \ne 0,\ y^T A \ge 0$

Beweis (Satz v. Motzkin):

"$\Rightarrow$": Sei x mit $Ax < b$, $Bx \leq c$.

Seien $y, z \geq 0$ mit $y^TA + z^TB = 0 \Leftrightarrow z^TB = -y^TA$

$\Rightarrow y^Tb + z^Tc \geq y^Tb + z^TBx = y^T(b - Ax) > 0$ falls $y \neq 0$
≥ 0 sonst ✓

"$\Leftarrow$": Farkas-Variante, (i) $\Rightarrow \exists x: Ax \leq b, Bx \leq c$.

Sei $a_i x \leq b_i$ eine Zeile von $Ax \leq b$

(ii) $\Rightarrow \nexists y, z \geq 0: y^TA + z^TB = 0, y \neq 0, y^Tb + z^Tc \leq 0$

$\Rightarrow \nexists y, z \geq 0: y^TA + z^TB - a_i = -a_i, y \neq 0, y^Tb + z^Tc - b_i \leq -b_i$

$\Rightarrow \nexists y, z \geq 0: y^TA + z^TB = -a_i, \quad y^Tb + z^Tc \leq -b_i$

denn falls es y, z wie zuletzt gibt, so kann ich y_i um eins erhöhen und erhalte y, z wie davor

$\Rightarrow -a_i \notin \text{cone}(A, B) \quad \forall i$

(Farkas)
$\Leftrightarrow \exists x^i: Ax^i \geq 0, Bx^i \geq 0, -a_i^Tx^i < 0 \quad \forall i$

$\Rightarrow \exists x^i: Ax^i \leq 0, Bx^i \leq 0, a_i^Tx_i < 0 \quad \forall i$

$\Rightarrow \exists x^i. Ax^i \leq b, Bx^i \leq c, a_i^Tx_i < b_i \quad \forall i$

$\overline{x} := \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x^i$ erfüllt $Ax < 0$, $Bx \leq c$.

UND: $\exists x$ mit $Ax \leq b, Bx \leq c$, das können wir auf x^i addieren

□