Felix König, FKOENIG@MATH. ..., MA 510

WWW.MATH.TU-BERLIN.DE/~FKOENIG

- Organisation
- Einführung zu LP
- Ein Beispiel ...

- Aufgaben
  - → erscheinen Mo vor der UE
  - → Abgabe Mo $\boxed{\text{vor}}$ der UE
  - → Arbeit in 3er Gruppen
- PAs
- Scheine (i. d. R. unbenotet)
  - → 50% d. Punkte in Aufgaben je Semesterhälfte
  - → alle PAs pünktlich & zufriedenstellend
- Gruppen-Accounts im Unix-Pool (CPLEX, ZIMPL, ..)

TUT Di:

10–12	16
12–14	22
14–16	10
16–18	10

Mo 14–16 18

*) Di, 21.10.

Einleitung zu LP

- Sei S_I die Menge der zul. Lösungen einer Instanz I eines Optimierungsproblems P. Eine Nachbarschaft für P ist eine Abbildung

$$\boxed{N_I : S_I \longrightarrow 2^{S_I}} \quad \left(= \{0,1\}^{|S_I|}\right)$$

mit $y \longmapsto N_I(y) \subseteq S_I$.

- $y \in S_I$ heißt lokal optimal, falls es die beste Lösung in seiner Nachbarschaft ist:

$$c(x) \geq c(y) \quad \forall x \in N_I(y)$$

- Lokale Suche:

- Input
  - Instanz I eines Optimierungsproblem P0 mit Nachbarschaft NI
  - Startlösung $y \in SI$
- Output
  - lokales Optimum bzgl. NI
- Methode
  - iterative Verbesserung
    - while es gibt bessere Lösung $x \in NI(y)$ do
      - wähle bessere Lösung $x \in NI(y)$
      - $y := x$
    - return y

• Satz:

- 2.16 Satz (lokal - global)
  - Sei I eine Instanz eines Optimierungsproblem mit $SI \subseteq Rn$ konvex und c konvex in SI.
    => Die Nachbarschaft
    $N\varepsilon(y) := \{ x \in SI : || y-x || \le \varepsilon \}$
    definiert durch den Euklidischen Abstand ist für jedes $\varepsilon > 0$ exakt.

LP ist ein konvexes Optimierungsproblem

LP:

$$\boxed{\begin{array}{c} \min \ c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{array}} \iff \begin{array}{l} \min \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \\ A_1 x \leq b_1 \\ A_2 x \geq b_2 \\ A_3 x = b_3 \end{array}$$

"Standardform", $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$, $n \geq m$ $\quad x_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$

• $\dim(\mathrm{Im}(A)) = \mathrm{rang}(A) = m$ (falls $\mathrm{rang}(A) < m$, so gibt es lin. abh. Zeilen => redundante Ungleichungen.)

$\Rightarrow$ jede maximale lin. unabh. Teilmenge der Spalten von A hat Kardinalität m

- eine solche Teilmenge von Spalten von A heißt <u>Basis</u>.
- ... ihre zug. Spalten <u>Basisspalten</u>
- ... ihre zug. Variablen <u>Basisvariablen</u> x_B

- Notation: Die Matrix der Basisspalten ist B.

$\Rightarrow$ durch $Bx_B = b$ ist eine Lösung zu

$Ax = b$ gegeben.

- In dieser Lösung sind alle Nichtbasisvariablen $x_N = 0$.

$\Rightarrow$ nenne Lösung $x = (x_B, x_N)$ <u>Basislösung</u>

$$(N \cdot x_N +)\ Bx_B = b$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x_B = B^{-1} b}$$

- x_B heißt <u>zulässige Basislösung</u>, falls $x_B \geq 0$

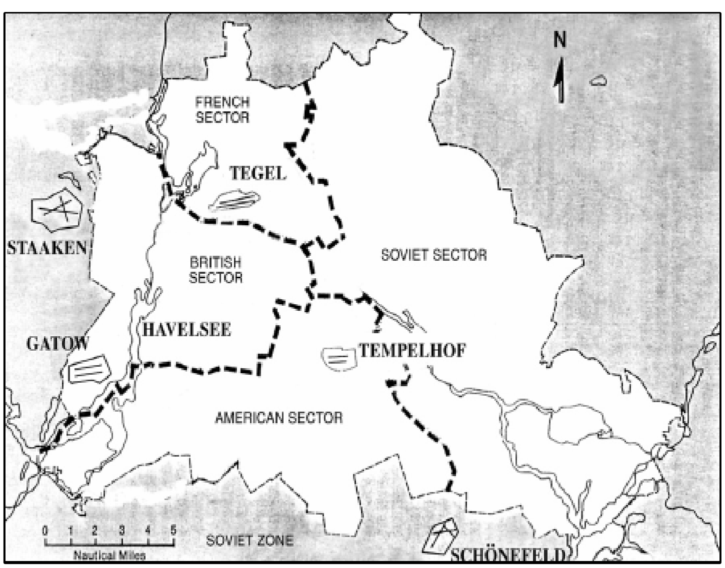
$(x_{B_i} \geq 0 \ \forall i \in B)$

$$\boxed{\text{Simplex-Algorithmus ist lokale Suche auf zul. Basislösungen.}}$$

"Berlin Luftbrücke"

"Berlin Airlift"

"Hungerharke"



Berlin 1945 - 1990

Juni 1948: Sowjetunion blockiert Landtransport nach Berlin

⇒ Luftbrücke: · 463 Tage

· 2.300.000 Tonnen

· > 200 Flugzeuge

· > 250.000 Flüge

⇒ Starts alle < 3 Minuten

1947: Entdeckung des Simplex-Algorithmus durch George Dantzig.

⇒ Luftbrücke vielleicht erste große Anwendung von LP.

Ein Beispiel (von Hand gelöst & 1949 veröffentlicht):

Variablen: p_i ≙ neue Flugzeuge in Viertel i

$\overline{p_i}$ ≙ Flugzeuge, die in Viertel i nicht fliegen.

m_i ≙ neue Crews, die in Viertel i ausgebildet wird

$\tilde{m}_i$ ≙ Crew in Urlaub in Viertel i

$\overline{m_i}$ ≙ Crews, die in Viertel i nicht fliegt und nicht in Urlaub ist, nicht Ausbilder ist

Objective: $$\min \sum_{i=1}^{4} \left(200 \cdot p_i + 7 \cdot \overline{m_i} + 10 \cdot m_i + 5 \cdot \tilde{m}_i\right)$$

Constraints:

$$\left.\begin{aligned}
c_1 + \overline{p}_1 &= 110 \\
c_i + \overline{p}_i &= 0.8\, c_{i-1} + \overline{p}_{i-1} + p_{i-1} \qquad i = 2,..,4
\end{aligned}\right\}\ \text{Flugzeug}$$

$$\left.\begin{aligned}
3c_1 + \overline{m}_1 + \frac{1}{20} m_1 &= 330 \\
\tilde{m}_1 &= 0 \\
3c_2 + \overline{m}_2 + \frac{1}{20} m_2 &= m_1 + \overline{m}_1 \\
\tilde{m}_2 &= 0.8 \cdot 3 \cdot c_1 = 2{,}4\, c_1 \\
\left.\begin{aligned}
3c_i + \overline{m}_i + \frac{1}{20} m_i &= m_{i-1} + \overline{m}_{i-1} + \tilde{m}_{i-1} \\
\tilde{m}_i &= 2{,}4\, c_{i-1}
\end{aligned}\right\} & \ i = 3,4
\end{aligned}\right\}\ \text{Crew}$$