- Berlin Airlift ctd.
- Geometrie LP
- Simplex Algorithmus

Berlin Airlift

Variablen:

$p_i \mathrel{\hat{=}}$ neue Flugzeuge in Viertel i

$\overline{p_i} \mathrel{\hat{=}}$ unbenutzte Flugzeuge in Viertel i

$m_i \mathrel{\hat{=}}$ Crew in Ausbildung (inkl. Ausbilder)

$\overline{m_i} \mathrel{\hat{=}}$ Crew, die bereit steht aber nicht fliegt

$\tilde{m}_i \mathrel{\hat{=}}$ Crew im Urlaub

$$\min \quad \boxed{200 \cdot \sum_{i=1}^{4} p_i} + \boxed{10 \cdot \sum_{i=1}^{4} m_i + 7 \cdot \sum_{i=1}^{4} \overline{m_i}}$$

s.t.

$$c_1 = 100$$
$$c_2 = 150$$
$$c_3 = 150$$
$$c_4 = 200$$

$$\boxed{\begin{aligned} c_1 + \overline{p_1} &= 110 \\ c_i + \overline{p_i} &= p_{i-1} + \overline{p_{i-1}} + 0.8\, c_{i-1} \qquad i = 2, \dots, 4 \end{aligned}}$$

$$3C_1 + \overline{m_1} + \frac{1}{20} m_1 = 330$$

$$3C_2 + \overline{m_2} + \frac{1}{20} m_2 = m_1 + \overline{m_1}$$

$$3C_i + \overline{m_i} + \frac{1}{20} m_i = m_{i-1} + \overline{m_{i-1}} + \widetilde{m_{i-1}} \qquad i = 3,4$$

$$\widetilde{m_1} = 0$$

$$\widetilde{m_i} = 0.8 \cdot 3 \cdot C_1 \qquad i = 2,3,4$$

Lösung:

$\boxed{p_1 = 60}$ $\qquad \overline{p_1} = 10$

$p_2 = 30$ $\qquad \overline{p_2} = \overline{p_3} = \overline{p_4} = 0$

$p_3 = 80$

$p_4 = 0$

$m_1 = \boxed{460}$ $\qquad \overline{m_1} = \boxed{7}$ $\qquad \widetilde{m_1} = 0$

$m_2 = 270$ $\qquad \overline{m_2} = 6$ $\qquad \widetilde{m_2} = 240$

$m_3 = 240$ $\qquad \overline{m_3} = 4$ $\qquad \widetilde{m_3} = 360$

$m_4 = 0$ $\qquad \overline{m_4} = 4$ $\qquad \widetilde{m_4} = 360$

$\boxed{\text{Kosten: } 46.920,4}$

- LP ist dekomponierbar in ein LP in p-Variablen und ein LP in den m-Variablen.

$\hookrightarrow$ gute Modellierung, Dekomposition immer wünschenswert.

- Lösung oben ist gerundete fraktionale Optimallösung. Das

0 ist i. A. KEINE optimale ganzzahlige Lösung – mehr dazu später...

Die Geometrie linearer Programme

- **Polyeder**: nichtleerer Durchschnitt endlich vieler Halbräume $HR_i := \{x \mid h^T x \leq b\} \subseteq \mathbb{R}^d$
- **Polytop**: endlicher Polyeder
- **Hyperebenen**: $H_i := \{x \mid h^T x = b\}$
- Hyperebene $H_i := \{x \mid h^T x = b\}$ **berührt** Polyeder P

  $:\Longleftrightarrow$ • $H_i \cap P \neq \emptyset$

  • $P \subseteq HR_i := \{x \mid h^T x \leq b\}$ oder

  $P \subseteq \overline{HR_i} := \{x \mid h^T x \geq b\}$
- $H_i \cap P$ heißt **Seite** von P
- Seite der Dimension $\begin{Bmatrix} d-1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$ heißt $\begin{Bmatrix} \text{Facette} \\ \text{Ecke} \\ \text{Kante} \end{Bmatrix}$.

Satz (Minkowski 1896): • Jedes Polytop ist die konvexe Hülle seiner Ecken.

- $V \subseteq \mathbb{R}^d$ endlich $\Rightarrow$ $\operatorname{conv}(V)$ ist Polytop P und $\{\text{Ecken von } P\} \subseteq V$.

Korrespondenz $Ax = b \longleftrightarrow P$

„$\xleftarrow{f}$“: geg.: m Ungleichungen $A'x' \leq b'$, $A' \in \mathbb{R}^{(m \times (n-m))}$, $x' \in \mathbb{R}^{(n-m)}$, $x' \geq 0$

- führe Schlupfvariablen ein

$$\Rightarrow A'x' + I x'' = b' \quad \rightsquigarrow \quad A := (A' \mid I_m) \in \mathbb{R}^{m \times n}$$
$$x := (x' \mid x'') \in \mathbb{R}^n, \; x \geq 0$$

$$x_i := \begin{cases} x_i' & i = 1, \dots, n-m \\ b_i - \sum_{j=1}^{n-m} a_{ij} x_{ij} & i = n-m+1, \dots, n \end{cases}$$

$$\boxed{\Rightarrow \; x' \text{ mit } A'x' \leq b \longrightarrow x \text{ mit } Ax = b}$$

„$\xrightarrow{f}$“: geg.: m Gleichungen $Ax = b$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $x \geq 0$

- Sei B Basis von A $\Rightarrow$ $A = (A_N \mid A_B)$
$$x = (x', x_B)$$

- Transformiere A_B zu I_m

$$\Rightarrow A = (A' \mid I_m), \quad b \rightsquigarrow b'$$

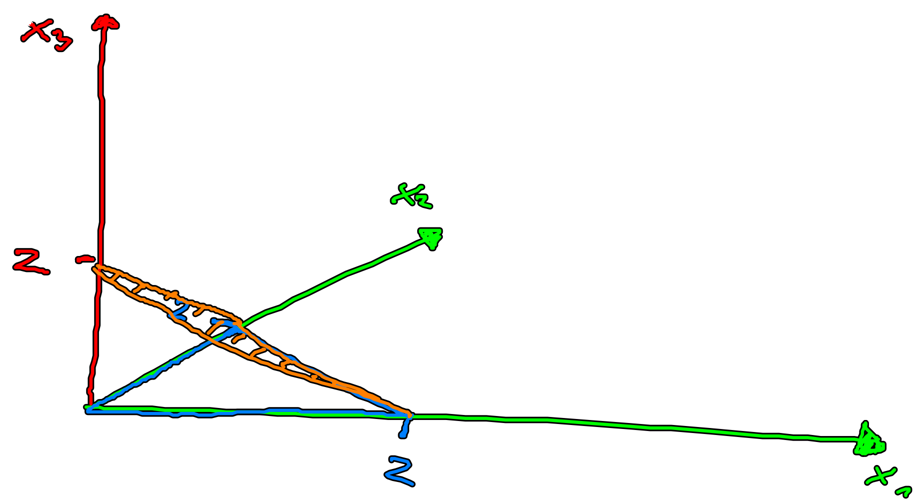
$\Rightarrow \quad x_i = b_i' - \sum_{j=1}^{n-m} a_{ij}' x_j \quad \forall\, i = n-m+1, \dots, n$

$\Rightarrow$ "Werte der NB-Variablen bestimmen eindeutig Werte der Basisvariablen"

$\Rightarrow$ "Vergesse die Basisvariablen, dann ändert sich die Menge der zul. Lösungen nicht".

$\Rightarrow \quad \boxed{\underset{\in \mathbb{R}^n}{x} \text{ mit } Ax = b \quad \longrightarrow \quad \underset{\in \mathbb{R}^{n-m}}{x'} \text{ mit } A'x' \leq b'}$

Bild:



$$x_1 + x_2 \leq 2 \qquad \longrightarrow \qquad x_1 + x_2 + x_3 = 2$$
$$x_1, x_2 \geq 0 \qquad \Leftrightarrow \quad x_3 = 2 - x_1 - x_2$$

"Eine Schlupfvariable zeigt in ihrer eigenen Dimension $i = n-m+1, \dots, n$ an, wieviel Schlupf Ungleichung $j = 1, \dots, m$ hat"

Satz: y' Ecke von $\{x' \mid A'x' \leq b'\}$

$\Leftrightarrow$ y Basislösung von $Ax = b$

Satz: Jede Instanz von LP nimmt ihr Optimum in einer zul. Basislösung an.

Beweis: 1) zu jeder Zielfunktion $c \in \mathbb{R}^n$ existiert Zielfunktion $d \in \mathbb{R}^{n-m}$ mit $(c^T x$ minimal über $Ax = b)$

$$\Longleftrightarrow (d^T x' \text{ minimal über } P = A'x' \leq b')$$

2) Das Optimum für $d^T x'$ wird in einer Ecke von P angenommen.

zu 1): Sei B Basis von $Ax = b$ mit zul. BL

$$\Rightarrow c^T x = c_N^T x_N + c_B^T x_B$$

$$= c_N^T x_N + c_B^T (b_i' - A_N' x_N)$$

$$= \underbrace{(c_N^T - c_B^T A_N)}_{\overset{!}{=} d^T} x_N + \underbrace{c_B^T b_i'}_{\text{konstant}} \qquad \square$$

zu 2): Sei $y_0 \in P$ minimal bzgl. $d^T y$.

$\Rightarrow \exists \lambda$ mit $\sum_i \lambda_i = 1$ und $y_0 = \sum_i \lambda_i \cdot y_i$ wobei y_i die Ecken von P sind.

Sei y^* die Ecke mit $d^T y$ am kleinsten.

$$d^T y_0 = d^T \sum_i \lambda_i y_i \boxed{\geq} d^T \sum_i \lambda_i y^* = d^T y^* \sum_i \lambda_i = d^T y^* \qquad \square$$

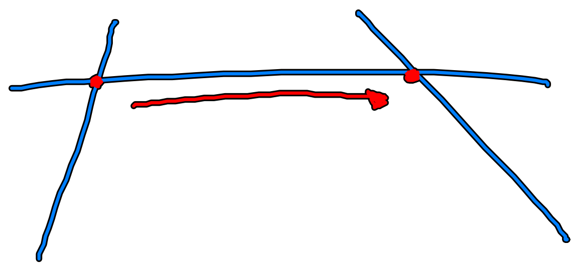
1&2) $\Rightarrow y^*$ Ecke UND optimal für d

$\Rightarrow \exists x^*$ BL UND optimal für c.

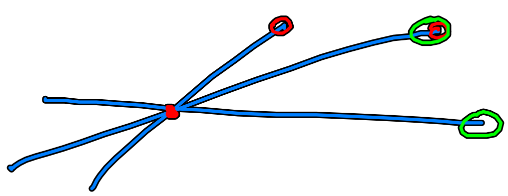
Korrespondenz LP ⟷ Polyeder im Simplex-Alg.

- Beim Pivot-Schritt verlässt eine Spalte die Basis, eine andere kommt hinzu.

- Beim Wechsel von einer Ecke eines Polyeders zu einer über eine Kante verbundenen anderen Ecke verlässt eine Facette den die Ecke definierenden Schnitt, eine andere kommt hinzu



"Schlupf zu einer neuen Ungleichung wird Null, eine andere Ungl. bekommt Schlupf."



"degenerierter Fall"