- Dualität
- Anwendung: Weighted Vertex Cover

Dualität

ADM 1: z.B. Max Flow in (G, u, s, t), $G=(V,E)$, $u: E \rightarrow \mathbb{R}^+$, $s,t \in V$

- Fluss ist $f: E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $f(e) \leq u(e) \; \forall E$
- Fluss f ist zulässiger s-t-Fluss, falls

$$\sum_{e \in \delta^-(v)} f(e) = \sum_{e \in \delta^+(v)} f(e) \quad \forall v \in V, \; v \neq s,t$$

Optimalitätskriterium:

f maximaler s-t-Fluss $\Longleftrightarrow$ $\nexists$ f-augmentierender s-t-Weg in G_f

Algo 1 (Ford-Fulkerson)

```
f(e) = 0  ∀ e ∈ E                          // f zulässig
while (∃ f-augmentierender Weg P in Gf) {  // so lange f nicht optimal
    erhöhe f auf P                         // f bleibt zulässig
}
```

! f im Laufe des Algorithmus immer zulässig, am Ende optimal !

Algo 2 (Push-Relabel)

Def.: $ex(v) := \sum_{e \in \delta^-(v)} f(e) - \sum_{e \in \delta^+(v)} f(e)$

$f(e) = 0 \quad \forall e \in E$

$f(e) = u(e) \quad \forall e \in \delta^+(s)$ // f unzulässig, aber $\nexists$ s-t-Weg in G_f $\Rightarrow$ Opt.-krit. erfüllt

while ($\exists v \in V$: $ex(v) > 0$) { // so lange f nicht zulässig

pushRelabel(v) // Opt.-krit. bleibt erfüllt

}

! f erfüllt im Algo immer Opt.-krit., ist am Ende zulässig !

ADM II: LP

- y zulässig $\Leftrightarrow$ $Ay = b$
- y optimal $\Leftarrow$ y optimale Basislösung zu Basis B

Optimalitätskriterium: Veränderung der Zielfunktion bei jedem möglichen Basiswechsel nicht-negativ.

wdh.: y BL $\Rightarrow$ $c^T y = \sum_{i=1}^{m} c_{B(i)} y_{B(i)}$

A_j kommt in Basis

$$\sum_{i=1}^{m} A_{B(i)}(y_{B(i)} - \Theta x_{ij}) + \Theta A_j = b$$

je Θ verändern sich die Kosten um

$$\overline{c}_j := c_j - \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \cdot c_{B(i)}$$

Erinnerung: $X = B^{-1}(b|A)$

$$\Rightarrow \boxed{\overline{c} := c^T - c_B^T B^{-1} A}$$

Opt.-krit.: $\overline{c}_j \geq 0 \quad \forall\, j = 1..n$

$$\boxed{\underbrace{c_B^T B^{-1}}_{=:\pi^T} A \leq c^T}$$

$\Rightarrow \quad \pi^T A \leq c^T$ definiert zulässigen Bereich des dualen LP.

Welche Zielfunktion? Hätten gerne: Optimalwerte von primalen und dualen Problem gleich (falls sie existieren).

(1) x, π zulässige primale, duale Lösungen

$$\Rightarrow \quad c^T x \underset{\text{duale Zul.}}{\geq} \pi^T A x \underset{\text{primale Zul.}}{=} \pi^T b$$

„schwacher Dualitätssatz"

(2) x optimal $\Rightarrow \exists$ Basis B mit $c_B^T B^{-1} A \leq c^T$

$\Rightarrow \pi^T := c_B^T B^{-1}$ ist dual zulässig: $\pi^T A \leq c^T$

$\pi^T b = c_B^T B^{-1} b = c_B^T x_B = c^T x$ "starker Dualitätssatz"

mit (1) $\Rightarrow \pi := c_B^T B^{-1}$ ist optimal für Zielfkt. $\boxed{\max \pi^T b}$

$$(P) \quad \begin{array}{c} \min c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{array} \quad \longrightarrow \quad (D) \quad \begin{array}{c} \max \pi^T b \\ \pi^T A \leq c \\ \pi \text{ bel.} \end{array}$$

Falls P nicht in Standardform, so gelten folgende Regeln:

Primal		Dual
$\min c^T x$		$\max \pi^T b$
$a_i^T x = b_i$	$i \in M$	π_i beliebig
$a_i^T x \geq b_i$	$i \in \overline{M}$	$\pi_i \geq 0$
$x_j \geq 0$	$j \in N$	$\pi^T A_j \leq c_j$
x_j beliebig	$j \in \overline{N}$	$\pi^T A_j = c_j$

(Im folgenden Notation etwas ungenau...)

Falls primale Bedingung Ungleichung:

$\hat{A} x \geq b \Rightarrow$ Schlupfvariable zur Herstellung der Standardform

$\Rightarrow x_i^s, \ i \in \overline{M}$ für jede $\geq$-Bedingung

- Koeffizient für x_i^s in A: -1
- Koeffizient in Zielfkt: 0

$\Rightarrow$ duale Bed.: $\underset{a_i^s}{-\pi} \leq \underset{c}{0} \Rightarrow \pi \geq 0$

- Duale des dualen ist primale
- Satz v. kompl. Schlupf

Anwendung: **Approximationsalgorithmus für Weighted Vertex Cover (VC)**

Instanz: $G = (V, E)$, $w : V \to \mathbb{R}^+$

Ziel: Finde $V' \subseteq V$ mit $\forall e = (u,v) \in E$

$u \in V'$ oder $v \in V'$

so dass $w(V') := \sum_{v \in V'} w(v)$ minimal.

Bem.: $VC \in NPC$ $\Rightarrow$ keine Hoffnung auf polynomielle Algorithmen

Betrachte folgenden Algo ALG:

```
done := ∅
x = 0, π = 0
while (done ≠ E) {
   • wähle (u,v) ∈ E \ done
   • π(u,v) := min { w(u) − Σ_{e∈δ(u), e∉(u,v)} π_e ; w(v) − Σ_{e∈δ(v), e∉(u,v)} π_e }
   • if u = argmin {
        done := done ∪ δ(u)
        x_u := 1
     }
     else
        done := done ∪ δ(v)
        x_v := 1
```

}

}

<u>Beh. 2:</u> $x_u = 0$ oder $\sum_{e \in \delta(u)} \pi_e = w(u)$ $\forall u \in V$ ✓

<u>Beh. 3:</u> $\pi_{(u,v)} \neq 0 \implies x_u + x_v \leq 2 = 2 \cdot 1$ ✓

<u>Lemma:</u> Seien x, π primal, dual zulässig für ein primal-duales LP-Paar und gilt

$$x_j \cdot (\pi^T A_j - c_j) = 0$$

und $\pi_i \neq 0 \implies a_i^T x \leq \alpha \cdot b_i$

so folgt $\boxed{c^T x \leq \alpha \cdot \pi^T b}$.

<u>Bew.:</u> Übungsaufgabe

<u>Satz:</u> ALG ist 2-Approximation für VC.

<u>Bew.:</u>
- Sei I bel. Instanz von VC
- A ist polynomiell (m Iterationen)
- wegen Beh. 2 & 3 erfüllen x, π aus ALG die Vorr. für das Lemma
- x, π aus ALG sind zul. wg. Beh. 1

$$\implies c^T x \leq 2 \pi^T b \leq 2\, OPT(P(I)) \leq 2\, OPT(I)$$

□