① Fourier-Motzkin-Elimination

② FME $\Rightarrow$ Farkas-Lemma $\Rightarrow$ Dualitätssatz

Fourier-Motzkin-Elimination

- zul. Lösung für $Ax = b$ durch Gauss
- zul. Lösung für $Ax \leq b$ so ähnlich?

Seien o.B.d.A. alle Einträge der ersten Spalte von A $0, -1, 1$.

$$\begin{array}{ccc} 0 & -1 & 1 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ i \in M & i \in M^- & i \in M^+ \end{array}$$

Definiere $x' := (x_2, \dots, x_n)$, $A' := (A_2 | A_3 | \dots | A_n)$

$$Ax \leq b \iff \begin{array}{rll} x_1 + a_i' x' \leq b_i & \forall\, i \in M^+ \\ -x_1 + a_i' x' \leq b_i & \forall\, i \in M^- \\ a_i' x' \leq b_i & \forall\, i \in M \end{array}$$

$$\iff \max_{i \in M^-} (a_i' x' - b_i) \leq x_1 \leq \min_{j \in M^+} (b_j - a_j' x') \qquad (1)$$

$$a_i' x' \leq b_i \qquad \forall\, i \in M$$

$$\iff \begin{array}{ll} a_i' x' - b_i \leq b_j - a_j' x' & \forall\, i \in M^-, j \in M^+ \\ a_i' x' \leq b_i & \forall\, i \in M \end{array}$$

$\Longleftrightarrow \quad (a_i' + a_j')x' \leq b_i + b_j \qquad \forall i \in M^-, j \in M^+$

$\qquad a_i x' \leq b_i \qquad \forall i \in M$

n Variablen $\qquad\qquad\qquad$ $n-1$ Variablen

m Ungleichungen $\rightsquigarrow$ $|M^-||M^+| + |M|$ Ungleichungen

(2) $\qquad\qquad\qquad\qquad$ (3)

- Verfahren i. A. nicht polynomiell.

- Jede Lösung x' zu (3) kann zu einer Lösung zu (2) erweitert werden durch Setzung von x_n entspr. (1).

$\Rightarrow$ Löse $Ax \leq b$ durch

1. Elimination von $n-1$ Variablen
   $\Rightarrow$ Ungleichungssystem in 1 Variable
2. Erweitere Lösung zu Lösung mit n Variablen

- FME kann auch zur Lösung von LPs verwendet werden:

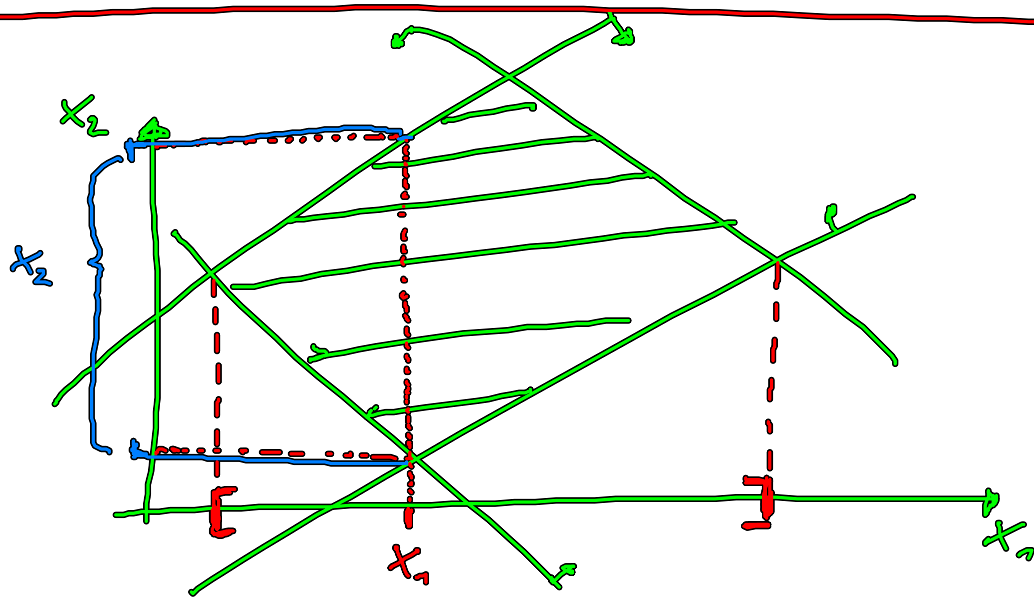
1. $\min c^T x$, $Ax = b$, $x \geq 0$ $\rightsquigarrow$ $\tilde{A}x \leq \tilde{b}$, $\lambda - c^T x \geq 0$

2. FME, bis alle x eliminiert sind (nur λ übrig).
3. Wähle λ so klein wie möglich

(4) Erweitere λ auf Lösung $(x_1, \dots, x_n, \lambda)$.

Bem.: Aus FME folgt:

$$\boxed{\text{Projektionen von Polyedern sind wieder Polyeder.}}$$



The BIG Picture

VL, UE 6.11.

VL

Dualitätssätze $\Longrightarrow$ Farkas Lemma $\Longleftarrow$

Simplex (ohne Kreiseln)

Fourier-Motzkin

Noch ein Satz vorneweg: "Separating Hyperplane Theorem"

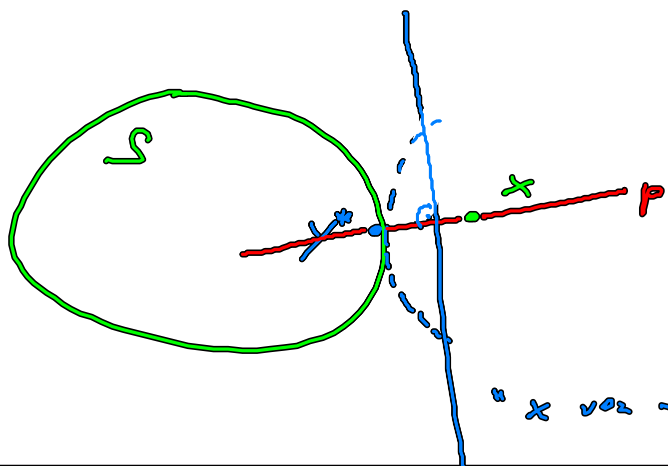
Sei $S \subset \mathbb{R}^n$, $S \neq \emptyset$, konvex und abgeschlossen.

Sei $x \notin S$.

Dann existiert $p \in \mathbb{R}^n$ mit

$p^T x < p^T y \quad \forall y \in S$

Bildchen:



$p := y^* - x$

"x von S separierende Hyperebene"

4.5 Satz (Farkas Lemma)

Seien $a_1, \dots, a_m \in R^n$ und $c \in R^n$. Dann sind äquivalent

(1) für alle $y \in R^n$ gilt: $y^T a_i \geq 0$ für alle $i = 1,\dots,m$ => $y^T c \geq 0$

d.h. für alle y gilt:

y hat nichtnegative Projektion auf alle a_i

=> y hat nichtnegative Projektion auf c

(2) $c \in C(a_1, \dots, a_m)$

d.h. c liegt im von $a_1, \dots, a_m$ erzeugten Kegel

$$\Updownarrow$$

$\neg(2)$ $\quad Ax = c,\ x \geq 0$ hat keine zul. Lösung

$\Longleftrightarrow \neg(1)$ $\quad \exists y \in \mathbb{R}^n: \ y^T A \geq 0,\ y^T c < 0$

Beweis: "$\Leftarrow$": Es gelte $\neg(1)$. Ann.: $Ax = c,\ x \geq 0$ hat zul. Lösung.

Sei y mit $y^T A \geq 0,\ y^T c < 0$

$$\Rightarrow 0 > y^T c = \underbrace{y^T A}_{\geq 0} \underbrace{x}_{\geq 0} \geq 0 \quad \lightning$$

"$\Rightarrow$": Sei $S := \{Ax \mid x \geq 0\} = \text{cone}(A)$.

$\neg(2) \Rightarrow c \notin \text{cone}(A) = S$.

Wollen: Sep. Hyperplane auf S anwenden.

$\Rightarrow S$ muss nicht-leer, konvex, abgeschlossen sein

✓ ✓ ?

Sei $S' := \{(y, x) : Ax = y,\ x \geq 0\}$

$$Ax = y,\ x \geq 0 \iff \begin{array}{rl} -y + Ax \leq 0 & (M^-) \\ y - Ax \leq 0 & (M^+) \\ -x \leq 0 & (M) \end{array}$$

$\Rightarrow S'$ ist Schnitt von Halbräumen, also Polyeder.

$\Rightarrow$ Eliminiere alle y durch FME.

$$\iff \begin{array}{c} Ax \leq y \leq Ax \\ x \geq 0 \end{array} \iff \begin{array}{c} \cancel{Ax \leq Ax} \\ x \geq 0 \end{array}$$

$\Rightarrow S = \{Ax \mid x \geq 0\}$ ist Projektion von S'

$\Rightarrow S$ ist Polyeder, weil S' Polyeder.

$\Rightarrow S$ ist abgeschlossen.

$\neg(2) \Rightarrow c \notin \text{cone}(A) = S$

Sep. Hyperplane Theo. $\Rightarrow \exists p$ mit $p^T c < p^T y \quad \forall y \in S$

$0 \in S \Rightarrow p^T c < 0 = p^T 0$.

$\underline{\text{z}}$: $p^T A \geq 0$

Für jedes $\lambda \geq 0$ ist $\lambda \cdot A_j \in S$ $\forall j$, denn

$$x^j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \lambda \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{Stelle } j \implies Ax^j = \lambda \cdot A_j$$

$$\implies p^T c < p^T \lambda \cdot A_j \qquad \forall \lambda > 0$$

$$\implies \frac{1}{\lambda} p^T c < p^T A_j \qquad \forall \lambda > 0$$

$$\Big\downarrow \lambda \to \infty$$

$$0 \leq p^T A_j \qquad \forall j \qquad \square$$

Starker Dualitätssatz:

$$(P) \quad \begin{aligned} \min\ & c^T x \\ \text{s.t. } & Ax \geq b \\ & x \text{ bel.} \end{aligned} \qquad\qquad (D) \quad \begin{aligned} \max\ & \pi^T b \\ \text{s.t. } & \pi^T A = c \\ & \pi \geq 0 \end{aligned}$$

Hat P eine Optimallösung, so auch D und ihre Werte sind gleich.

Beweis: Sei x^* Optimallösung für P.

Sei $I := \{ i \mid a_i^T x_* = b_i \}$ ("tighte" Zeilen)

Sei r zul. für P $\implies c^T r \geq c^T x^*$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} r_j a_{ij} \geq b_i \qquad \forall i \in I$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} r_j a_{ij} - b_i \geq 0 \qquad \forall i \in I$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left(r_j - \frac{b_i}{n \cdot a_{ij}}\right) \geq 0 \qquad \forall i \in I$$

t.b.c.

und $$\sum_{j=1}^{n} c_j\left(r_j - \frac{b_i}{n \cdot a_{ij}}\right) \geq \sum_{j=1}^{n} c_j\left(x_j^* - \frac{b_i}{n \cdot a_{ij}}\right) \qquad \forall i \in I$$

(Farkas)

$$\Leftrightarrow \exists p_i \geq 0 : \quad c_j = \sum_{i \in I} p_i a_{ij} \qquad \forall j$$

Sei $p_i := 0 \quad \forall i \notin I$

$$\Rightarrow p^T A = c^T \quad \Rightarrow \quad p \text{ dual zulässig!}$$

$$p^T b = \sum_{i \in I} p_i b_i \overset{\text{Wahl von } I}{=} \sum_{i \in I} p_i a_i^T x^* = c^T x^* .$$

$\Rightarrow p$ dual optimal. $\square$