① Fourier-Motzkin-Elimination

② FME $\Rightarrow$ Farkas-Lemma $\Rightarrow$ Dualitätssatz

Fourier-Motzkin-Elimination

- zul. Lösung für $Ax = b$ durch Gauss
- zul. Lösung für $Ax \leq b$ so ähnlich?

Seien o.B.d.A. alle Einträge der ersten Spalte von A $0, -1, 1$.

$$\begin{array}{ccc} 0 & -1 & 1 \\ \swarrow & \downarrow & \searrow \\ i \in M & i \in M^- & i \in M^+ \end{array}$$

Definiere $x' := (x_2, \dots, x_n)$, $A' := (A_2 | A_3 | \dots | A_n)$

$$Ax \leq b \iff \begin{array}{rll} x_1 + a_i' x' \leq b_i & \forall i \in M^+ \\ -x_1 + a_i' x' \leq b_i & \forall i \in M^- \\ a_i' x' \leq b_i & \forall i \in M \end{array}$$

$$\iff \max_{i \in M^-} (a_i' x' - b_i) \leq x_1 \leq \min_{j \in M^+} (b_j - a_j' x') \qquad (1)$$

$$a_i' x' \leq b_i \qquad \forall i \in M$$

$$\iff \begin{array}{ll} a_i' x' - b_i \leq b_j - a_j' x' & \forall i \in M^-, j \in M^+ \\ a_i' x' \leq b_i & \forall i \in M \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \quad (a_i' + a_j')x' \leq b_i + b_j \qquad \forall\, i \in M^-,\ j \in M^+$$

$$a_i x' \leq b_i \qquad \forall\, i \in M$$

n Variablen $\rightsquigarrow$ $n-1$ Variablen

m Ungleichungen $\rightsquigarrow$ $|M^-||M^+| + |M|$ Ungleichungen

(2) $\qquad$ (3)

- Verfahren i. A. nicht polynomiell.

- Jede Lösung x' zu (3) kann zu einer Lösung zur (2) erweitert werden durch Setzung von x_n entspr. (1).

$\Rightarrow$ Löse $Ax \leq b$ durch

① Elimination von $n-1$ Variablen
$\Rightarrow$ Ungleichungssystem in 1 Variable

② Erweitere Lösung zu Lösung mit n Variablen

- FME kann auch zur Lösung von LPs verwendet werden:

① $\min\ c^T x$, $Ax = b$, $x \geq 0$ $\rightsquigarrow$ $\tilde{A}x \leq \tilde{b}$, $\lambda - c^T x \geq 0$

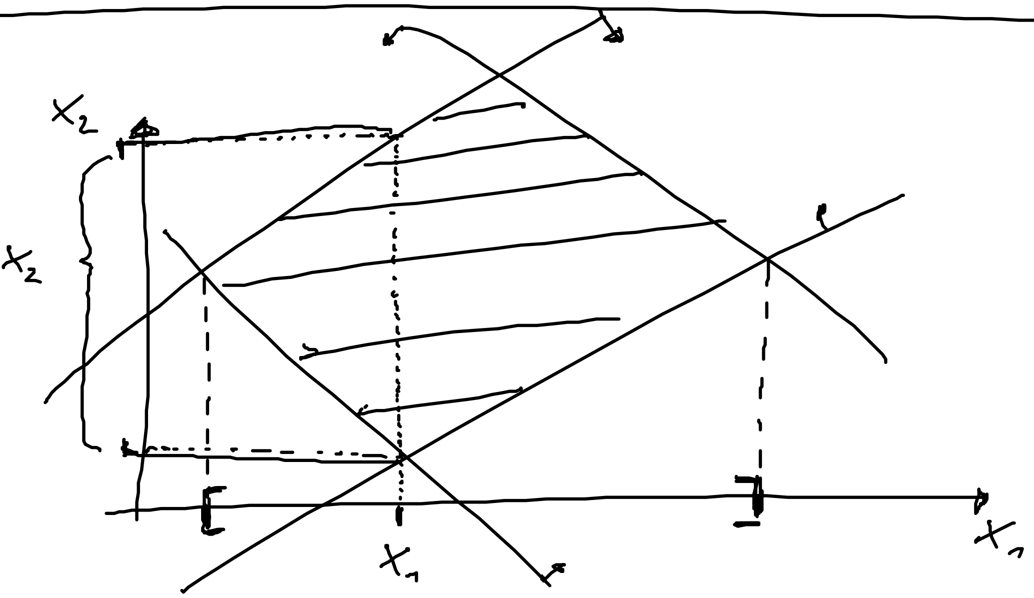
② FME, bis alle x eliminiert sind (nur λ übrig).

③ Wähle λ so klein wie möglich

(4) Erweitere λ auf Lösung $(x_1, \dots, x_n, \lambda)$. ∎

Bem.: Aus FME folgt:

$\boxed{\text{Projektionen von Polyedern sind wieder Polyeder.}}$



The BIG Picture

VL

VL, UE 6.11.

Dualitätssätze $\Longrightarrow$ Farkas Lemma
$\Longleftarrow$

$\Uparrow$ Simplex (ohne Kreiseln)

$\Uparrow$ Fourier-Motzkin

Noch ein Satz vorneweg: "Separating Hyperplane Theorem"

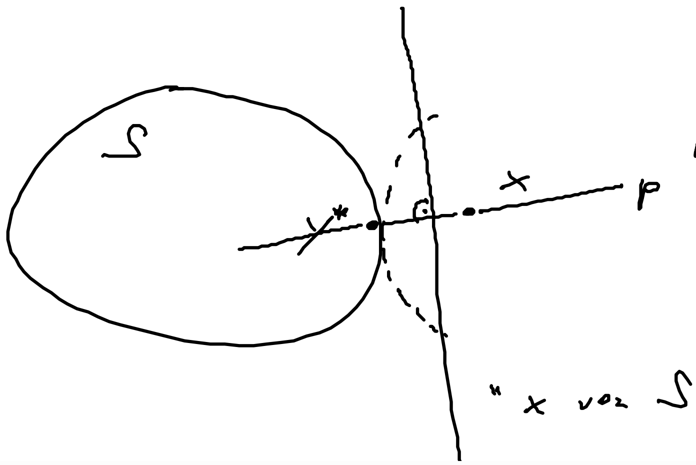
Sei $S \subset \mathbb{R}^n$, $S \neq \emptyset$, konvex und abgeschlossen.

Sei $x \notin S$.

Dann existiert $p \in \mathbb{R}^n$ mit

$$p^T x < p^T y \quad \forall y \in S$$

Bildlich:



"x von S separierende Hyperebene"

4.5 Satz (Farkas Lemma)

Seien $a_1, \dots, a_m \in R^n$ und $c \in R^n$. Dann sind äquivalent

(1) für alle $y \in R^n$ gilt: $y^T a_i \geq 0$ für alle $i = 1,\dots m$ => $y^T c \geq 0$

d.h. für alle y gilt:

y hat nichtnegative Projektion auf alle a_i

=> y hat nichtnegative Projektion auf c

(2) $c \in C(a_1, \dots, a_m)$

d.h. c liegt im von $a_1, \dots, a_m$ erzeugten Kegel

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \neg(2) & Ax = c,\ x \geq 0 \text{ hat } \underline{\text{keine}} \text{ zul. Lösung} \\ \Longleftrightarrow \neg(1) & \exists y \in \mathbb{R}^n:\ y^T A \geq 0,\ y^T c < 0 \end{array}}$$

Beweis: "$\Leftarrow$": Es gelte $\neg(1)$. Ann.: $\underline{Ax = c}$, $\underline{x \geq 0}$ hat zul. Lösung.

Sei y mit $y^T A \geq 0$, $y^T c < 0$

$$\Rightarrow 0 > y^T c = \underbrace{y^T A}_{\geq 0} \underbrace{x}_{\geq 0} \geq 0 \quad \lightning$$

"$\Rightarrow$": Sei $S := \{Ax \mid x \geq 0\} = \text{cone}(A)$.

$\neg(2) \Rightarrow c \notin \text{cone}(A) = S$.

Wollen: Sep. Hyperplane. auf S anwenden.

$\Rightarrow S$ muss nicht-leer, konvex, abgeschlossen sein
✓ ✓ ?

Sei $S' := \{(y,x) : Ax = y,\ x \geq 0\}$

$$Ax = y,\ x \geq 0 \iff \begin{aligned} -y + Ax &\leq 0 \qquad (M^-) \\ y - Ax &\leq 0 \qquad (M^+) \\ -x &\leq 0 \qquad (M) \end{aligned}$$

$\Rightarrow S'$ ist Schnitt von Halbräumen, also Polyeder.

$\Rightarrow$ Eliminiere alle y durch FME.

$$\iff \begin{aligned} Ax \leq y &\leq Ax \\ x &\geq 0 \end{aligned} \iff \begin{aligned} \cancel{Ax \leq Ax} \\ x \geq 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow S = \{Ax \mid x \geq 0\}$ ist Projektion von S'

$\Rightarrow S$ ist Polyeder, weil S' Polyeder.

$\Rightarrow S$ ist abgeschlossen.

$\neg(2) \Rightarrow c \notin \text{cone}(A) = S$

Sep. Hyperplane Theo. $\Rightarrow \exists p$ mit $p^T c < p^T y \quad \forall y \in S$

$0 \in S \Rightarrow p^T c < 0 = p^T 0$.

$\underline{Z}$: $p^T A \geq 0$

Für jedes $\lambda \geq 0$ ist $\lambda \cdot A_j \in S$ $\forall j$, denn

$x^j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \lambda \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow$ Stelle j $\Rightarrow$ $Ax^j = \lambda \cdot A_j$

$\Rightarrow$ $p^T c < p^T \lambda \cdot A_j$ $\quad \forall \lambda > 0$

$\Rightarrow$ $\frac{1}{\lambda} p^T c < p^T A_j$ $\quad \forall \lambda > 0$

$\downarrow \lambda \to \infty$

$0 \leq p^T A_j$ $\quad \forall j$ $\quad \square$

<u>starker Dualitätssatz</u>:

(P) $\quad$ min $c^T x$ s.t. $Ax \geq b$, x bel. $\qquad$ (D) $\quad$ max $\pi^T b$ s.t. $\pi^T A = c$, $\pi \geq 0$

Hat P eine Optimallösung, so auch D und ihre Werte sind gleich.

<u>Beweis</u>: Sei x^* Optimallösung für P.

Sei $I := \{ i \mid a_i^T x_* = b_i \}$ ("tighte" Zeilen)

Sei r zul. für P $\Rightarrow$ $c^T r \geq c^T x^*$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} r_j a_{ij} \geq b_i \qquad \forall i \in I$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} r_j a_{ij} - b_i \geq 0 \qquad \forall i \in I$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \left(r_j - \frac{b_i}{n \cdot a_{ij}} \right) \geq 0 \qquad \forall i \in I$$

t.b.c.

und $$\sum_{j=1}^{n} c_j \left(r_j - \frac{b_i}{n \cdot a_{ij}} \right) \geq \sum_{j=1}^{n} c_j \left(x_j^* - \frac{b_i}{n \cdot a_{ij}} \right) \qquad \forall i \in I$$

(Farkas)

$$\Leftrightarrow \exists p_i \geq 0 : \quad c_j = \sum_{i \in I} p_i a_{ij} \qquad \forall j$$

Sei $p_i := 0 \quad \forall i \notin I$

$\Rightarrow p^T A = c^T \quad \Rightarrow \quad p$ dual zulässig!

$$p^T b = \sum_{i \in I} p_i b_i \overset{\text{Wahl von } I}{=} \sum_{i \in I} p_i a_i^T x^* = c^T x^* .$$

$\Rightarrow p$ dual optimal. $\square$