- Primal-Duale Algorithmus
- Simplex-Algorithmus mit Schranken
- Netzwerk-Simplex

<u>zu PA 1:</u> Abgabe verschoben auf 5.6.!

- Kreiseln: lexikographisch / Bland ?
- Numerik: • gelegentliche Neuberechnung von B^{-1} hilft.
  • schnell z.B. mit LU-Zerlegung

Primal-Duale Algorithmus

<u>Erinnerung:</u> komplementärer Schlupf

$$(P) \quad \min c^T x \quad Ax = b \quad x \geq 0 \qquad\qquad (D) \quad \max \pi^T b \quad \pi^T A \leq c \quad \pi \text{ bel.}$$

$$(x,\pi) \text{ optimal} \iff (c_j - \pi^T A_j) \cdot x_j = 0 \quad \forall j$$

<u>Idee:</u>
- verwalte duale zulässige Lösung
- prüfe, ob primal zul. x existiert, das kompl. Schlupf erfüllt
- falls nicht, verändere duale Lösung π, so dass irgendwann mehr duale Restriktionen mit Gleichheit erfüllt werden.

<u>konkreter:</u>

- Sei π dual zulässig (leicht zu finden)
- $J := \{ j = 1,..,n : \pi^T A_j = c_j \}$
- Suche x mit $x_j = 0 \quad \forall j \notin J$ (Phase I Simplex)

$\Rightarrow$ "Restricted Primal Problem"

$$\left.\begin{array}{llcll} \min & \xi & = & \sum_{i=1}^m x_i^a & \\ \text{unter} & \sum_{j\in J} a_{ij} x_{ij} + x_i^a & = & b_i & i = 1,\dots,m \\ & x_j & \geq & 0 & j \in J \\ & x_j & = & 0 & j \notin J \\ & x_i^a & \geq & 0 & i = 1,\dots,m \end{array}\right\} \quad \text{(RP)}$$

- Falls $\xi_{opt} = 0$, fertig (restliche x sind optimal für P).
- Falls $\xi_{opt} > 0 \Rightarrow$ verändere π, so dass (irgendwann) J wächst.

Dazu betrachte duale des RPP:

$$\left.\begin{array}{llclll} \max & w = \pi^T b & & & & (6.2) \\ \text{unter} & \pi^T A_j & \leq & 0 & j \in J & (6.3) \\ & \pi_i & \leq & 1 & i = 1,\dots,m & (6.4) \\ & \pi_i & & \text{beliebig} & i = 1,\dots,m & (6.5) \end{array}\right\} \quad \text{(DRP)}$$

Sei π' optimal für DRP.

Betrachte $\pi^* := \pi + \Theta \pi'$

$$\Rightarrow \pi^{*T} b = \pi^T b + \Theta(\underbrace{\pi'^T b}_{= \xi_{opt} > 0})$$

Ziel: Wähle $\Theta > 0$, so dass π^* zulässig für das Duale (D) des urspr. Problems (P). $\Rightarrow$ "π^* besser als π".

in (D) $\quad \pi^T A \leq c \,, \quad (\pi + \Theta \pi')^T A \overset{!}{\leq} c$

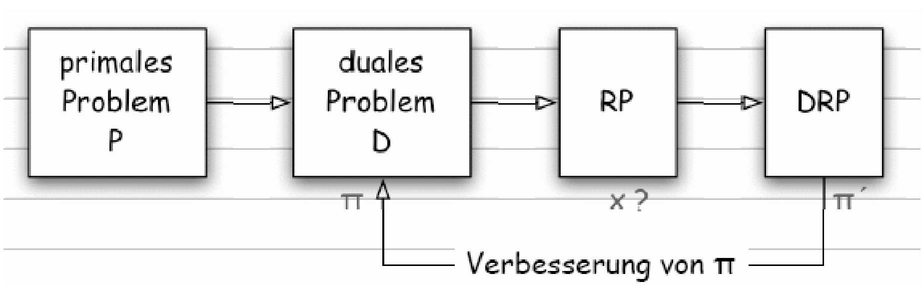
$\pi'^T A_j \leq 0 \quad \forall j \quad \Rightarrow \pi^*$ zul. für beliebig großes Θ

$\Rightarrow$ (D) unbeschränkt

$\Rightarrow$ (P) unzulässig.

Sonst: $\quad \pi^T A_j + \Theta(\pi'^T A_j) \leq c_j \quad \forall j$

$$\Rightarrow \Theta := \min_{j \notin J} \frac{c_j - \pi^T A_j}{\pi'^T A_j} .$$



Simplex-Algorithmus mit Schranken

Problem: $\quad 2 \leq x \leq 5$

bisher: führt zu zwei Nebenbedingungen.

$\Rightarrow$ Basis vergrößert sich.

Idee: Behandle solche "einfachen" Nebenbedingungen implizit im Simplex-Algorithmus.

Sei $\qquad \min \; c^T x$

$$Ax = b$$
$$l \le x \le u$$

<u>untere Schranke einfach:</u>

Löse
$$\min c^T y$$
$$Ay = \underline{b - Al}$$
$$0 \le y \le \underline{u - l}$$

Definiere $x := y + l$

$\Rightarrow Ax = Ay + Al = b \quad \Rightarrow x$ zul.

$c^T y$ minimal $\Rightarrow c^T y + c^T l$ minimal $\Rightarrow c^T x$ minimal.

$\Rightarrow x$ optimal.

$\Rightarrow$ ab sofort o.B.d.A. $l = 0$.

<u>obere Schranken:</u>
$$\min c^T x$$
$$Ax = b$$
$$0 \le x \le u$$

<u>Bisher:</u> Sei x Basislösung

$$x \begin{cases} \to x_B & \text{Basisvariable zu Spalten in } B \\ \to x_N = 0 \end{cases}$$

$$A \begin{cases} \to B \\ \to A_N \end{cases}$$

$\Rightarrow Ax = Bx_B = b \quad \Rightarrow x_B = B^{-1} b$

<u>Jetzt:</u>

$$x \begin{cases} \to x_B \\ \to x_L = 0 & \text{zu Spalten in } L \text{ "} \subseteq A \text{"} \\ \to x_U = u & \text{zu Spalten in } U \text{ "} \subseteq A \text{"} \end{cases}$$

$$A \begin{matrix} \nearrow B \\ \rightarrow L \\ \searrow U \end{matrix} \qquad \Rightarrow \quad Ax = Bx_B + Uu_U = b$$

$$\Rightarrow \boxed{x_B = B^{-1}b - B^{-1}Uu_U}$$

Eine Lösung dieser Form heißt <u>Basislösung zu LP mit oberen Schranken</u>.

<u>Satz:</u> LP mit oberen Schranken hat Optimallösung

$\Longleftrightarrow$ hat optimale Basislösung (der obigen Form).

<u>Beweis:</u> LP mit oberen Schranken lässt sich schreiben als LP in Standardform:

$$\begin{aligned} \min\ & c^T x \\ & Ax = b \\ & x + s = u \\ & x \geq 0 \\ & s \geq 0 \quad \text{(Schlupf)} \end{aligned} \qquad (P')$$

Wir wissen: P' hat optimale Lösung $\Rightarrow$ P' hat optimale BL zu Basis B'. $B' x_B = \begin{pmatrix} b \\ u \end{pmatrix}$ sieht so aus:

$$\begin{pmatrix} B & B_q & 0 & 0 \\ I_p & 0 & I_q & 0 \\ 0 & I_q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_j : x_j \in B',\ s_j \in B' \\ x_j : x_j \in B',\ s_j \notin B' \\ s_j : x_j \in B',\ s_j \in B' \\ s_j : x_j \notin B',\ s_j \in B' \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} b \\ u \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \} \ m \\ \} \ n \end{array}$$

<u>Zeile 1:</u> $Bx_B = b$ "$Ax = b$"

<u>Zeile 2:</u> $x_j \neq 0,\ s_j \neq 0 \Rightarrow x_j + s_j = u_j$

B

Zeile 3: $x_j \neq 0,\ s_j = 0 \Rightarrow x_j = u_j$ U

Zeile 4: $x_j = 0,\ s_j \neq 0 \Rightarrow s_j = u_j$ L

$\Rightarrow$ Die x-Variablen aus dieser Basislösung bilden
- Optimallösung für LP mit oberen Schranken
- Basislösung für LP mit oberen Schranken, denn sie haben die geforderte Struktur.

$\square$

Korollar: Eine zul. Basislösung für ein LP mit oberen Schranken ist optimal

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{array}{lll} \bar{c}_j = 0 & x_j \in B & \\ \bar{c}_j \geq 0 & x_j \in L & (\text{beim } \underline{\text{Erhöhen}} \text{ wächst } c^T x) \\ \bar{c}_j \leq 0 & x_j \in U & (\text{beim } \underline{\text{Verkleinern}} \text{ wächst } c^T x) \\ & \Updownarrow & \\ & x_j = u_j & \end{array}$$

Anpassung eines Pivot-Schritts:

(1) Wähle Spalte s mit $s \in L$ und $\bar{c}_s < 0$
oder
$s \in U$ und $\bar{c}_s > 0$

(2) Verändere x_s so dass neue BL zulässig bleibt, d.h.
- keine Basisvariable <u>negativ</u> oder $\boxed{> u}$ wird

Für Werte der neuen Basisvariablen gilt bei Schrittweite Θ:

$$x_k'(\Theta) = \begin{cases} x_{B(i)} - \Theta_i x_{is}, & k = B(i), \quad i = 1, \dots, m \\ \Theta, & k = s, \ k \in L \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$x_{is} < 0 \quad \Rightarrow \quad x_{B(i)}$ wird erhöht

$\Rightarrow \quad x_{B(i)} - \Theta x_{is} \leq u_{B(i)}$

$$\Rightarrow \quad \Theta_i := \frac{u_{B(i)} - x_{B(i)}}{-x_{is}}$$

$x_{is} > 0 \quad \Rightarrow \quad x_{B(i)}$ wird verkleinert

$\Rightarrow \quad x_{B(i)} - \Theta_i x_{is} \geq 0$

$$\Rightarrow \quad \Theta_i := \frac{x_{B(i)}}{x_{is}}$$

Wähle $\Theta := \min \{ \underbrace{\min_{i=1,\dots,m} \Theta_i}_{\text{Zulässigkeit der alten BV}}, \underbrace{u_s}_{\text{Zulässigkeit der neuen Basisvariable}} \}$

$u_s \leq \min_i \Theta_i \quad \Rightarrow \quad B$ unverändert, eine NB-Variable wechselt von L nach U falls $\bar{c}_s < 0$ oder von U nach L falls $\bar{c}_s > 0$.

sonst $\quad \Rightarrow \quad x_s$ wechselt von U/L nach B, x_r mit $r = \operatorname{argmin}\{\Theta_i\}$ verlässt B.

Anwendung: Netzwerk-Simplex

Min Cost Flow

Instanz: (G, u, b, c)

- $G = (V, E)$ zsh. ger. Graph
- $u: E \to \mathbb{R}^+$ Kapazitäten
- $b: V \to \mathbb{R}$ Überschuss
- $c: E \to \mathbb{R}^+$ Kosten

Lösung: $x: E \to \mathbb{R}^+$ mit $x(e) \leq u(e) \quad \forall e \in E$

$$\sum_{e \in \delta^+(v)} x(e) - \sum_{e \in \delta^-(v)} x(e) = b(v) \quad \forall v \in V$$

Als LP: Sei $A \in \{-1, 0, 1\}^{|V| \times |E|}$

mit $a_{ij} = \begin{cases} 1 & j \in \delta^+(i) \\ -1 & j \in \delta^-(i) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

$\Rightarrow$ Lösung von

$$\min c^T x$$
$$Ax = b$$
$$0 \leq x \leq u$$

ist Optimallösung für (G, u, b, c).

Beobachtung: $\sum_{i=1}^{m} a_i = 0 \Rightarrow A$ singulär

$\Rightarrow$ Streiche beliebige Zeile und A wird regulär.