- VL diesen Mi: 12:00 – 13:15 Uhr

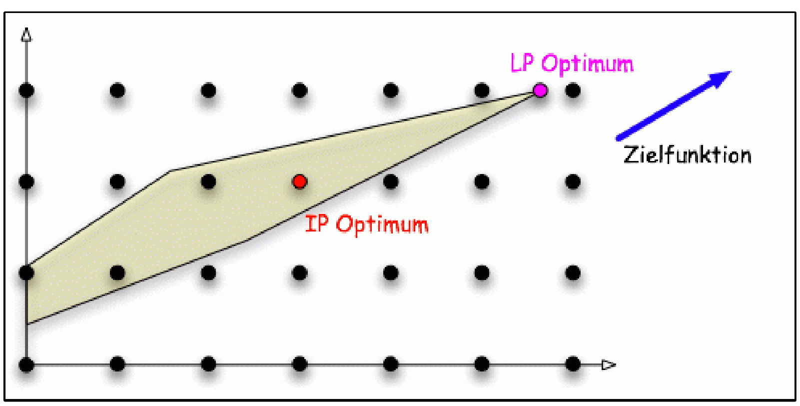
- Mo, 5.1. keine VE (TUT findet statt)
- Mi, 14.1. keine VL
- Do, 15.1. VE (statt VL)

- Abnahme PA 1: Termine per Email

- bin ab morgen bis Weihnachten
- VE 15.1.: Sebastian Stiller

- Jain-Vazirani-Algorithmus für Facility Location

Ganzzahlige Lineare Optimierung



- $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ unimodular $:\Longleftrightarrow$ $\det(B) \in \{-1, 1\}$
- $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ vollständig unimodular $:\Longleftrightarrow$ jede quadratische Untermatrix unimodular
- A TUM $\Longrightarrow$ $a_{ij} \in \{-1, 0, 1\}$

Satz: A TUM, b ganzz. $\Rightarrow$ Simplex findet ganzz. Optimallösung von $\min c^T x$
$Ax \overset{\leq}{=} b$
$x \geq 0$.

Primal-Duale Algorithmus für

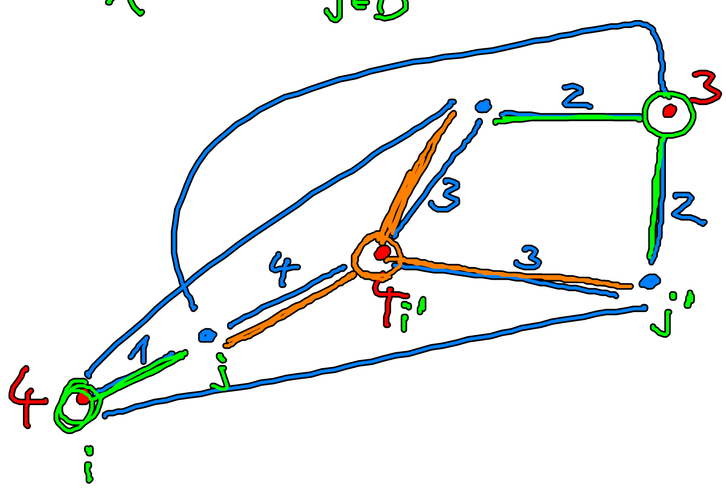
Facility Location

Instanz: Menge D Kunden
F möglichen Standorten
f_i: $i \in F$ Kosten für Öffnung von i
c_{ij}: $i \in F, j \in D$ Kosten der Versorgung von j von i aus.

Lösung: $X \subseteq F$, $\sigma: D \to X$ mit

$$\sum_{i \in X} f_i + \sum_{j \in D} c_{\sigma(j)j} \quad \text{minimal.}$$

Bsp.:



$c = 4 + 3 + 3 + 4$
$= \underline{\underline{14}}$

$c = 3 + 4 + 2 + 2 + 1$
$= \underline{\underline{12}}$

Annahme: c ist Metrik auf $D \cup F$, d.h.

$$c_{ij} + c_{i'j} + c_{i'j'} \geq c_{ij'}$$

$\Rightarrow$ "Metric Facility Location" (MFL).

<u>Bem.:</u> MFL ist stark NP-vollständig (Reduktion von Weighted Set Cover)

<u>Satz (Guha & Khuller 1999):</u> Die Existenz eines 1,463-Approximationsalgorithmus für MFL würde $P = NP$ beweisen.

(d.h. wahrscheinlich gibt es kein 1,463-Approx.-Algo).

<u>Satz (Mahdian, Ye, Zhang 2002):</u> $\exists$ 1,52-Approx.-Algo für MFL.

<u>Jain & Vazirani 2001:</u> 3-Approximation in $O(m \log m)$, wobei $m = |D| \cdot |F|$.

- v_j: "Preis, den Kunde j bezahlt"
- w_{ij}: "Anteil des Preises, der für Öffnung von i gezahlt wird."

<u>Kompl. Schlupf:</u> $y_i \cdot \left(f_i - \sum_j w_{ij}\right) = 0 \quad \forall i$

"i bleibt geschlossen oder wird vollständig bezahlt"

$$x_{ij} \cdot \left(c_{ij} - (v_j - w_{ij})\right) = 0 \qquad \forall\, i,j$$

"Ist j mit i verbunden, so zahlt j genau diese Verbindung und sein Anteil an der Öffnung von i"

$$w_{ij} \cdot \left(y_i - x_{ij}\right) = 0 \qquad \forall\, i,j$$

"Falls i geöffnet, so trägt ein Kunde nur zu den Kosten bei, falls er auch mit i verbunden ist."

Idee für Primal-Duale Algo:

"Erhöhe Preise gleichmäßig, bis jeder Kunde eine Verbindung zu einem bezahlten Standort hat."

! Erzeuge dabei aber nur ganzzahlige primale Lösungen **!**

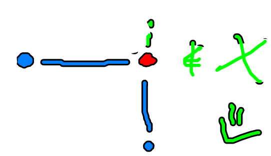
Phase I: Bestimmung von vorläufig geöffneten Standorten

Phase II: Einschränkung auf endgültig — " — — " —

- Am Ende von Phase 1 hat ein Kunde u.U. für mehr als einen Standort mitbezahlt → Phase II.
- $G := (Y, E)$, $E := \{(i,i') : \exists\, j \in D : w_{ij} > 0,\ w_{i'j} > 0\}$
- Wähle inklusionsmaximale stabile Menge X in Y und setze

$\forall j$: $\sigma(j) \in X$ ✓

$\sigma(j) \notin X \Rightarrow \sigma(j) = i$ mit $i \in \left(N(\sigma(j)) \cap X\right)$



! $N(i) \cap X \neq \emptyset$, da X inklusionsmaximal

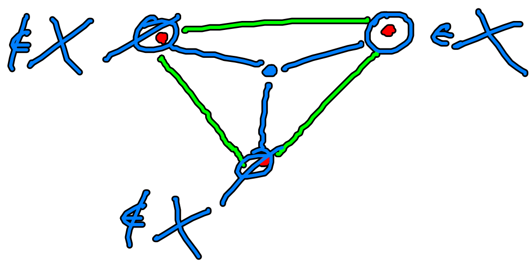
Satz: Algo ist 3-Approximation.

Beweis: I v, w sind dual zul. nach Konstruktion

$$\Rightarrow \sum_{j \in D} v_j \le OPT$$

II $i \in X \Rightarrow \overset{a}{\sum_{j \in D} w_{ij} = f_i}$ nach Konstruktion

und $\left(w_{ij} > 0 \overset{b}{\Rightarrow} \sigma(j) = i\right)$, denn



III Claim: $c_{\sigma(j)j} \le 3\left(v_j - w_{\sigma(j)j}\right)$ "approximativer Schlupf"

$$\Rightarrow \sum_{i \in X} f_i + \sum_{(i,j):\, i = \sigma(j)} c_{ij} \overset{\mathrm{IIa}}{\le} \sum_{i \in X} \sum_{j \in D} w_{ij} + 3\left(\sum_{j \in D} v_j - \sum_{(i,j):\, i = \sigma(j)} w_{\sigma(j)j}\right)$$

$$= \sum_{i \in X} \sum_{j \in D} w_{ij} + 3 \sum_{j \in D} v_j - 3 \cdot \overset{\overset{\mathrm{IIb}}{=}}{\sum_{i \in X} \sum_{j \in D} w_{ij}}$$

$$\le 3 \cdot \sum_{j \in D} v_j \overset{\mathrm{I}}{\le} 3 \cdot OPT \qquad \square$$

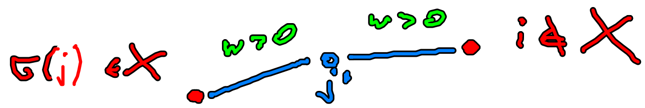
Beweis Claim: Fall 1: $c_{\sigma(j)j} = v_j - w_{\sigma(j)j}$ ✓

Fall 2: $v_j - w_{\sigma(j)j} < c_{\sigma(j)j} \Rightarrow v_j - c_{\sigma(j)j} < w_{\sigma(j)j}$

$\Rightarrow \boxed{v_j < c_{\sigma(j)j},}$ $w_{\sigma(j)j} = 0$

⇒ j wurde nicht in Phase 1 zu $\sigma(j)$ verbunden

⇒ j wurde in Phase 2 "indirekt" verbunden.



⇒ $\exists\, i \in F \setminus X : \boxed{v_j \ge c_{ij}}$ (I)

⇒ $\exists\, j' \in D: \quad w_{ij'} > 0, \quad w_{\sigma(j)j'} > 0$

⇒ $c_{ij'} = v_{j'} - w_{ij'} \boxed{< v_{j'}}$ (II)

$c_{\sigma(j)j'} = v_{j'} - w_{\sigma(j)j'} \boxed{< v_{j'}}$ (III)

Seien t_1, t_2 die Werte der gleichmäßig wachsenden j, als $\sigma(j)$, i in Phase I geöffnet wurden.

Außerdem: Nach Bem. oben waren i, $\sigma(j)$ noch nicht geöffnet, als $(\sigma(j), j')$, (i, j') tight wurden.

⇒ $v_{j'} \overset{(B)}{\le} \min\{t_1, t_2\}$

und $t_2 \le v_j$, da j in Phase 1 zu i verbunden.

⇒ $\boxed{v_{j'} \le v_j}$ (IV)

⇒ $c_{\sigma(j)j} \le c_{\sigma(j)j'} + c_{ij'} + c_{ij}$

$$< \underbrace{v_{j'}}_{III} + \underbrace{v_{j'}}_{II} + \underbrace{v_j}_{I} \overset{IV}{\le} 3 \cdot v_j = 3\left(v_j + w_{\sigma(j)j}\right)$$

□