- VL diesen Mi: 12:<u>00</u> – 13:15 Uhr

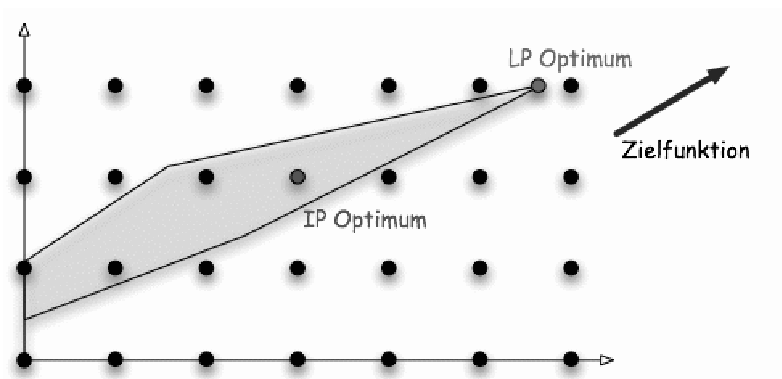
- Mo, 5.1. keine UE (TUT findet statt)
- Mi, 14.1. keine VL
- Do, 15.1. UE (statt VL)

- Abnahme PA 1: Termine per Email

- bin ab morgen bis Weihnachten
- UE 15.12.: Sebastian Stiller

- Jain-Vazirani-Algorithmus für Facility Location

Ganzzahlige Lineare Optimierung



- $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ unimodular $:\Longleftrightarrow \det(B) \in \{-1, 1\}$
- $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ vollständig unimodular $:\Longleftrightarrow$ jede quadratische Untermatrix unimodular
- A TUM $\Longrightarrow a_{ij} \in \{-1, 0, 1\}$

Satz: A TUM, b ganzz. $\Rightarrow$ Simplex findet ganzz. Optimallösung von $\min c^T x$
$$Ax \overset{\leq}{=} b$$
$$x \geq 0.$$

Primal-Dualer Algorithmus für

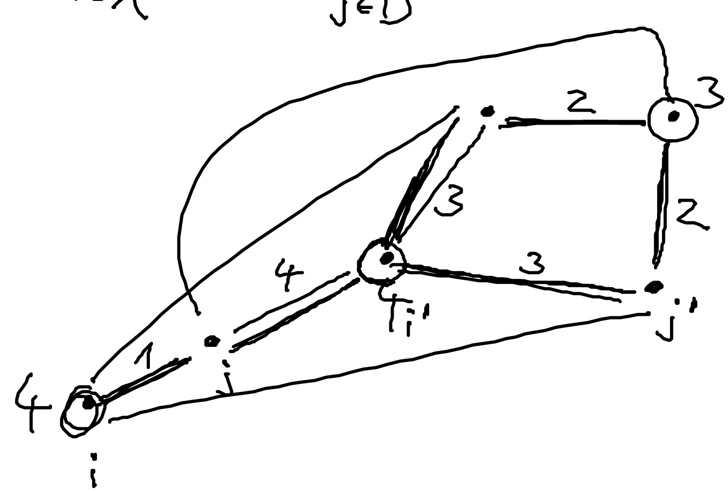
Facility Location

Instanz: Menge D Kunden
F möglichen Standorten
$f_i : i \in F$ Kosten für Öffnung von i
$c_{ij} : i \in F, j \in D$ Kosten bei Versorgung von j von i aus.

Lösung: $X \subseteq F$, $\sigma : D \to X$ mit

$$\sum_{i \in X} f_i + \sum_{j \in D} c_{\sigma(j)j} \quad \text{minimal.}$$

Bsp.:



$c = 4 + 3 + 3 + 4 = \underline{\underline{14}}$

$c = 3 + 4 + 2 + 2 + 1 = \underline{\underline{12}}$

Annahme: c ist Metrik auf $D \cup F$, d.h.

$$c_{ij} + c_{i'j} + c_{i'j'} \geq c_{ij'}$$

$\Rightarrow$ "Metric Facility Location" (MFL).

<u>Bem.:</u> MFL ist stark NP-vollständig (Reduktion von Weighted Set Cover)

<u>Satz (Guha & Khuller 1999):</u> Die Existenz eines 1,463-Approximationsalgorithmus für MFL würde P = NP beweisen.

(d.h. wahrscheinlich gibt es kein 1,463-Approx.-Algo).

<u>Satz (Mahdian, Ye, Zhang 2002):</u> $\exists$ 1,52-Approx.-Algo für MFL.

<u>Jain & Vazirani 2001:</u> 3-Approximation in $O(m \log m)$, wobei $m = |D| \cdot |F|$.

- v_j: "Preis, den Kunde j bezahlt"
- w_{ij}: "Anteil des Preises, der für Öffnung von i gezahlt wird."

<u>Kompl. Schlupf:</u> $y_i \cdot (f_i - \sum_j w_{ij}) = 0 \quad \forall i$

"i bleibt geschlossen oder wird vollständig bezahlt"

$$x_{ij} \cdot \left(c_{ij} - (v_j - w_{ij})\right) = 0 \qquad \forall\, i,j$$

"Ist j mit i verbunden, so zahlt j genau diese Verbindung und sein Anteil an der Öffnung von i"

$$w_{ij} \cdot \left(y_i - x_{ij}\right) = 0 \qquad \forall\, i,j$$

"Falls i geöffnet, so trägt ein Kunde nur zu den Kosten bei, falls er auch mit i verbunden ist."

<u>Idee für Primal-Dualen Algo:</u>

"Erhöhe Preise gleichmäßig, bis jeder Kunde eine Verbindung zu einem bezahlten Standort hat."

! Erzeuge dabei aber nur ganzzahlige primale Lösungen !

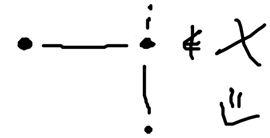
<u>Phase I:</u> Bestimmung von vorläufig geöffneten Standorten

<u>Phase II:</u> Einschränkung auf endgültig — " — — " —

- Am Ende von Phase 1 hat ein Kunde u.U. für mehr als einen Standort mitbezahlt $\longrightarrow$ Phase II.
- $G := (Y, E)$, $\quad E := \{(i,i') : \exists\, j \in D : w_{ij} > 0,\ w_{i'j} > 0\}$
- Wähle <u>inklusionsmaximale</u> stabile Menge X in Y und setze

$\forall j$: $\quad \sigma(j) \in X \quad$ ✓

$\qquad \sigma(j) \notin X \quad \Rightarrow \sigma(j) = i$ mit $i \in \left(N(\sigma(j)) \cap X\right)$



! $N(i) \cap X \neq \emptyset$, da X inklusionsmaximal

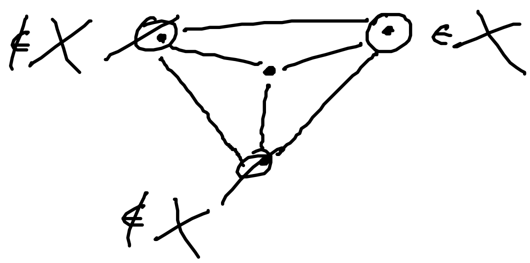
Satz: Algo ist 3-Approximation.

Beweis: I v, w sind dual zul. nach Konstruktion

$$\Rightarrow \sum_{j \in D} v_j \leq OPT$$

II $i \in X \Rightarrow \sum_{j \in D} w_{ij} \overset{a}{=} f_i$ nach Konstruktion

und $\left(w_{ij} > 0 \overset{b}{\Rightarrow} \sigma(j) = i \right)$, denn



III **Claim:** $c_{\sigma(j)j} \leq 3 \left(v_j - w_{\sigma(j)j} \right)$ "approximativer Schlupf"

$$\Rightarrow \sum_{i \in X} f_i + \sum_{(i,j): i = \sigma(j)} c_{ij} \overset{\mathrm{II}a}{\leq} \sum_{i \in X} \sum_{j \in D} w_{ij} + 3 \left(\sum_{j \in D} v_j - \sum_{(i,j): i = \sigma(j)} w_{\sigma(j)j} \right)$$

$$= \sum_{i \in X} \sum_{j \in D} w_{ij} + 3 \sum_{j \in D} v_j - 3 \cdot \overset{\overset{\mathrm{II}b}{\shortparallel}}{\sum_{i \in X} \sum_{j \in D} w_{ij}}$$

$$\leq 3 \cdot \sum_{j \in D} v_j \overset{\mathrm{I}}{\leq} 3 \cdot OPT \qquad \square$$

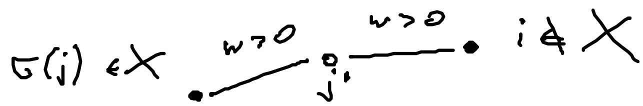
Beweis Claim: **Fall 1:** $c_{\sigma(j)j} = v_j - w_{\sigma(j)j}$ ✓

Fall 2: $v_j - w_{\sigma(j)j} < c_{\sigma(j)j} \Rightarrow v_j - c_{\sigma(j)j} < w_{\sigma(j)j}$

$$\Rightarrow \boxed{v_j < c_{\sigma(j)j},} \quad w_{\sigma(j)j} = 0$$

$\Rightarrow$ j wurde nicht in Phase 1 zu $\sigma(j)$ verbunden

$\Rightarrow$ j wurde in Phase 2 "indirekt" verbunden.



$$\Rightarrow \exists\, i \in F \setminus X : \boxed{v_j \geq c_{ij}} \quad \text{(I)}$$

$\circ\, j$

$$\Rightarrow \exists\, j' \in D: \quad w_{ij'} > 0, \quad w_{\sigma(j)j'} > 0$$

$$\Rightarrow \quad c_{ij'} = v_{j'} - w_{ij'} \boxed{< v_{j'}} \quad \text{(II)}$$

$$c_{\sigma(j)j'} = v_{j'} - w_{\sigma(j)j'} \boxed{< v_{j'}} \quad \text{(III)}$$

Seien t_1, t_2 die Werte der gleichmäßig wachsenden j, als $\sigma(j)$, i in Phase I geöffnet wurden.

Außerdem: Nach Bem. oben waren i, $\sigma(j)$ noch nicht geöffnet, als $(\sigma(j), j')$, (i, j') tight wurden.

$$\Rightarrow \quad v_{j'} \overset{(B)}{\leq} \min\{t_1, t_2\}$$

und $\quad t_2 \leq v_j$, da j in Phase 1 zu i verbunden.

$$\Rightarrow \boxed{v_{j'} \leq v_j} \quad \text{(IV)}$$

$$\Rightarrow c_{\sigma(j)j} \leq c_{\sigma(j)j'} + c_{ij'} + c_{ij}$$

$$< \underset{\text{III}}{v_{j'}} + \underset{\text{II}}{v_{j'}} + \underset{\text{I}}{v_j} \overset{\text{IV}}{\leq} 3 \cdot v_j = 3\left(v_j + w_{\sigma(j)j}\right)$$

$\square$