

- Lagrange Relaxation
- Schrittlebungsverfahren
↳ Aufgabe 33

Lagrange Relaxation

- Ziel: gute Schranken für B & B
- Idee:
 - Partitioniere NBs eines LP in "einfach" und "schwierig" \rightarrow relaxiere "schwierig"
 - bestmögliche Verkettung der ungelassenen NBs
 - maximiere Zielfkt. über Strafkosten

$$\begin{array}{ll}
 \text{min} & c^T x \\
 (P) & Ax \geq b \quad (\text{"k schwere NB"}) \\
 & Bx \geq d \quad (\text{"m-k leichte NB"})
 \end{array}$$

\Rightarrow Führe k Lagrange-Multiplikatoren λ_i ein

$$\begin{array}{ll}
 \text{min} & c^T x + \lambda^T (b - Ax) =: L(x, \lambda) \\
 (LR_\lambda(P)) & Bx \geq d \\
 & \lambda \geq 0
 \end{array}$$

Lemma: Optimalwert von $LR_{\lambda}(P)$ ist nicht größer als der Optimalwert von P .

Beweis: Sei x Optimallösung von P
 $\Rightarrow x$ zul. für P und $LR_{\lambda}(P)$

$$\Rightarrow b - Ax \leq 0 \Rightarrow \lambda^T (b - Ax) \leq 0 \quad \square$$

\Rightarrow "Maximiere von $\min_x L(x, \lambda)$ über λ liefert bestmöglichste untere Schranke aus einer Relaxation von $Ax \geq b$."

Sogar mehr:

Lemma: (x, λ) zulässig für $LR_{\lambda}(P)$ und

- x optimal für $LR_{\lambda}(P)$
- x zulässig für P

Bezeichne z^* Optimalwert von P .

$$\Rightarrow c^T x - z^* \leq \lambda^T (b - Ax)$$

\Rightarrow Löse von $\max_{\lambda} \min_x L(x, \lambda)$ liefert untere Schranke.

UND: Es gibt gute Verfahren zur Lösung des Maximierungsproblems über $\lambda \Rightarrow$ Subgradientenverfahren.
 \hookrightarrow Mosey.

Satz: $\max_{\lambda} \min_x L(\lambda, x)$ ist mindestens so groß wie der Optimalwert der LP-Relaxation.

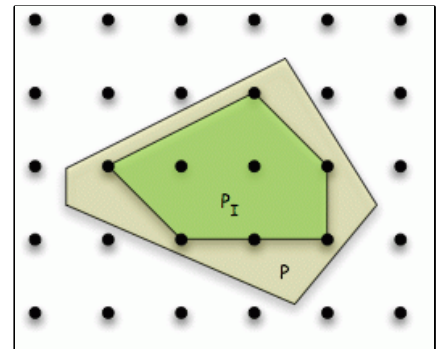
\Rightarrow "Lagrange-Relaxation liefert bessere Schranken als die LP-Relaxation".

Schrittebenenverfahren

! Anmerkung für ganze Abschluff: P rational. !

• ganz. Hülle P_I von Polyeder P ist die konvexe Hülle aller ganz. Punkte von P .

• Polyeder heißt ganz., falls alle seine Ecken ganz. sind.



$\Rightarrow P$ ganz. $\Leftrightarrow P = P_I$

\Rightarrow IP über $P =$ LP über P_I

\Rightarrow Lösung von ILPs geht durch Bestimmung der
gee. Hülle des Zulässigkeitsbereichs + Simplex-Verfahren.

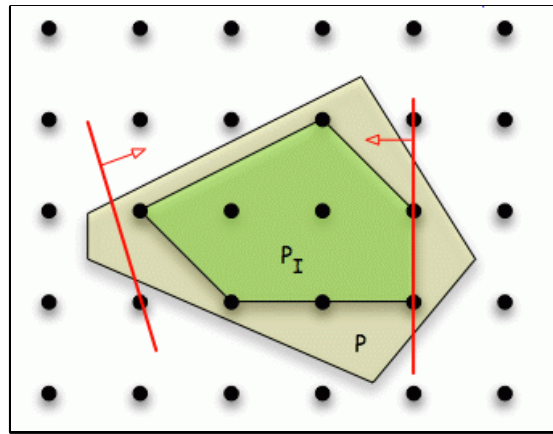
Ziel: Finde lineare Beschreibung von P_I für ggf. P .

Def.: Eine Schitttebene ist eine Hyperebene

$$w^T x \leq \epsilon \quad \text{mit}$$

$$\bullet Q := \{x \in P \mid w^T x \leq \epsilon\} \subset P$$

$$\bullet Q_I = P_I.$$



Schitttebenenverfahren für ILP über P :

loop {
 • berechne Optimallösung x^* der LP-Relaxation
 über P
 • falls x^* gzz., return x^* ;
 • berechne Schitttebene $w^T x \leq \epsilon$, mit
 $w^T x^* > \epsilon$.
 • $P := \{x \in P \mid w^T x \leq \epsilon\}$
}

" x^* -separierende Schitttebene"

Frage: • Wie bekomme ich eine x^* -separierende Schnitt-
ebene? \Rightarrow Kapitel 8.

• Wie bekomme ich überhaupt eine Schnittebene?

Idee: • positive Linearkombinationen von Zeilen von
 $Ax \leq b$ verändern P nicht.

• Finde solche, mit Koeff. $\gamma \geq 0$ und

• $\gamma^T A \geq z$.

• $\gamma^T b$ nicht $\geq z$.

$x \geq z \Rightarrow \gamma^T Ax \geq z$.

$\Rightarrow \gamma^T Ax \leq \lfloor \gamma^T b \rfloor$ ist Schnittebene.

• Solche Schnittebenen heißen "Gomory-Chvátal-Schritte"

• $P' := \bigcap_{\substack{\gamma^T A \geq z \\ \gamma \geq 0}} \{x \in P \mid \gamma^T Ax \leq \lfloor \gamma^T b \rfloor\}$ heißt

Chvátal-Hülle von P .

• Iterativ: $P^{(1)} := P'$
 $P^{(i+1)} := P^{(i)'}$.

Satz: P rationales Polyeder

$\Rightarrow P$ rationales Polyeder und man braucht nur endlich viele Gomory-Chvátal-Schritte zu seiner Beschreibung.

Satz: P rationales Polyeder

$\Rightarrow P^{(k)} = P_I$ für ein endliches k .

• k heißt Chvátal-Rang von P , $P^{(k)}$ heißt Chvátal-Abschluss.

• Sätze gelten nicht, falls P nicht rational.

• Chvátal-Rang rationaler Polyeder ist nicht beschränkt in Dimension oder Anzahl Ecken von P .

siehe Aufgabe 33

$$P := \text{conv} \left\{ (0,0), (0,1), (4, \frac{1}{2}) \right\}$$

$$\text{Es gilt: } P^{(2k-1)} \neq P_I = P^{(2k)}.$$

Beweis: • Wir erhalten P_I durch Hinzufügen der Ungleichung $x_1 \leq 0$ zu P .

Wir zeigen 2 Aussagen:

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \text{ a) } & x_1 + (2k-1)x_2 \leq 0 \\ \text{ b) } & x_1 - (2k-1)x_2 \leq 2k-1 \end{aligned}$$

sind Gomory-Cut-and-Solve Schritte für P.

aus ① folgt $P_I = P^{(2k)}$

② $(k - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \in P' = P^{(1)}$

aus ② folgt $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \in P^{(2k-1)} \neq P_I$

zu ①: Finde positive Linearkombination der Zeile
in $Ax \leq b$, die

1) LHS $1 \cdot (2k-1)$ und

2) RHS b' mit $(b') = 0$ hat.

Idee: Nutze Δ -Gestalt von $Ax \leq b$ aus

ACHTUNG: $y \geq 0$.

\Rightarrow such $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ mit $\gamma_1 \cdot \text{I} + \gamma_2 \cdot \text{II} + \gamma_3 \cdot \text{III}$

$\Rightarrow 1x_1 + (2k-1)x_2 \leq \alpha$ mit $0 \leq \alpha < 1$.

• γ_2 , so dass $\gamma_2 \cdot 2k = \alpha \Rightarrow \gamma_2 = \frac{\alpha}{2k} \geq 0$

• γ_1 , so dass $\gamma_1 \cdot 2k - \gamma_2 \cdot 2k = 2k - 1$

$\Rightarrow \gamma_1 = \frac{2k-1 + \alpha}{2k} \geq 0$

• γ_3 , so dass $\gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3 = 1$

$\Rightarrow \gamma_3 = 1 - \frac{1}{2k} + \frac{\alpha}{k} - 1$

$= \frac{\alpha}{k} - \frac{1}{2k} \stackrel{!}{\geq} 0$

$$\Rightarrow \text{z.B. } \alpha = \frac{3}{4} \quad (\Rightarrow L\alpha = 0)$$

$\Rightarrow (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ wie oben führt zu

$$\gamma^T A \leq \gamma^T b, \text{ ist } (1, 2k-1) \leq 0$$

① 6) analog.

zu ②: $z: (k - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \in P'$

• aus ① folgt, dass falls ② gilt, $(k - \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ auch eine Ecke von P' ist.

• Es reicht zu zeigen, dass

$$(IV) \quad x_1 \leq k - \frac{1}{2} - \varepsilon$$

kein Gomory-Cristofal-Schnitt ist für jedes $\varepsilon > 0$.

allgemeiner G-C-Schnitt:

$$(\gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3)x_1 + (2k\gamma_1 - 2k\gamma_2)x_2 \leq 2k \cdot \gamma_2$$

$$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \geq 0$$

Anw.: (IV) ist G-C-Schnitt

$$\Rightarrow \boxed{\gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3 = 1}$$

$$2k\gamma_1 - 2k\gamma_2 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\gamma_1 = \gamma_2}$$

$$\lfloor 2k \cdot \gamma_2 \rfloor \leq k - \frac{1}{2} - \varepsilon \Rightarrow 2k \gamma_2 \leq k - \frac{1}{2} - \varepsilon$$

$$\Rightarrow \gamma_n = \gamma_2 \leq \frac{k - \frac{1}{2} - \varepsilon}{2k}$$

$$1 - \underbrace{\gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3}_{\leq 0} \leq \frac{2k - 1 - 2\varepsilon}{2k} = 1 - \frac{1 - 2\varepsilon}{2k} < 1$$

□

↙