- Lagrange Relaxation
- Schnittebenenverfahren

↳ Aufgabe 33

Lagrange Relaxation

- Ziel: gute Schranken für B & B

- Idee:
  - Partitioniere NBs eines IP in "einfache" und "schwierige" → relaxiere "schwierige"
  - bestrafe Verletzung der weggelassenen NBs
  - maximiere Zielfkt. über Strafkosten

$$(P)\qquad \begin{aligned} &\min\ c^T x \\ &Ax \geq b \qquad (\text{"}k \text{ schwere NB"}) \\ &Bx \geq d \qquad (\text{"}m-k \text{ leichte NB"}) \end{aligned}$$

⇒ Führe k Lagrange-Multiplikatoren λ_i ein

$$(LR_\lambda(P))\qquad \begin{aligned} &\min\ c^T x + \lambda^T(b - Ax) =: L(x,\lambda) \\ &Bx \geq d \\ &\lambda \geq 0 \end{aligned}$$

Lemma: Optimalwert von $LR_\lambda(P)$ ist nicht größer als der Optimalwert von P.

Beweis: Sei x Optimallösung von P

$\Rightarrow$ x zul. für P und $LR_\lambda(P)$

$\Rightarrow b - Ax \leq 0 \Rightarrow \lambda^T(b - Ax) \leq 0$ □

$\Rightarrow$ "Maximieren von $\min_x L(x,\lambda)$ über λ liefert bestmögliche untere Schranke aus einer Relaxation von $Ax \geq b$."

sogar mehr:

Lemma: (x,λ) zulässig für $LR_\lambda(P)$ und
- x optimal für $LR_\lambda(P)$
- x zulässig für P

Bezeichne z^* Optimalwert von P.

$\Rightarrow \quad c^T x - z^* \leq \lambda^T(b - Ax)$.

$\Rightarrow$ Lösen von $\max_\lambda \min_x L(x,\lambda)$ liefert untere Schranke.

UND: Es gibt gute Verfahren zur Lösung des Maximierungsproblems über λ $\Rightarrow$ Subgradientenverfahren.
$\hookrightarrow$ Montag.

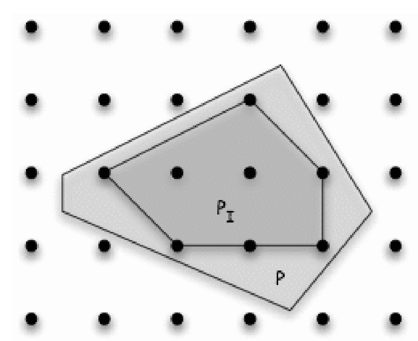
Satz: $\max_{\lambda} \min_{x} L(\lambda, x)$ ist mindestens so groß wie der Optimalwert der LP-Relaxation.

$\Rightarrow$ "Lagrange-Relaxation liefert bessere Schranken als die LP-Relaxation".

Schnittebenenverfahren

! Annahme für ganzen Abschnitt: P rational. !

- ganzz. Hülle P_I von Polyeder P ist die konvexe Hülle aller ganzz. Punkte von P.



- Polyeder heißt ganzz., falls alle seine Ecken ganzz. sind.

$\Rightarrow$ P ganzz. $\Longleftrightarrow$ $P = P_I$

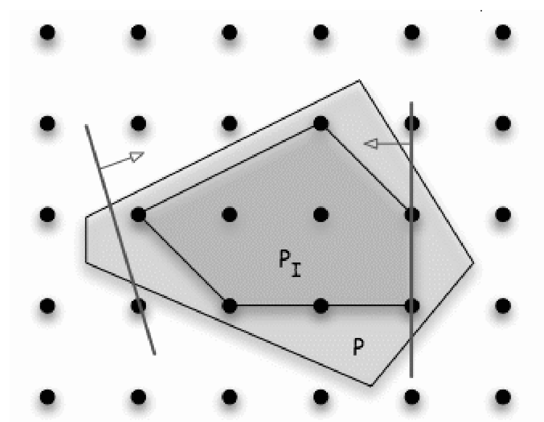
$\Rightarrow$ IP über P = LP über P_I

$\Rightarrow$ Lösung von ILPs geht durch Bestimmung der gzz. Hülle des Zulässigkeitsbereichs + Simplex-Verfahren.

Ziel: Finde lineare Beschreibung von P_I für geg. P.

Def.: Eine Schnittebene ist eine Hyperebene $w^T x \leq t$ mit

- $Q := \{x \in P \mid w^T x \leq t\} \subset P$
- $Q_I = P_I$.



Schnittebenenverfahren für ILP über P:

loop {
- berechne Optimallösung x^* der LP-Relaxation über P
- falls x^* gzz., return x^*;
- berechne Schnittebene $w^T x \leq t$, mit $\boxed{w^T x^* > t.}$
- $P := \{x \in P \mid w^T x \leq t\}$

}

"x^*-separierende Schnittebene"

<u>Frage:</u> • Wie bekomme ich eine x^*-separierende Schnittebene? $\Rightarrow$ Kapitel 8.

• Wie bekomme ich überhaupt eine Schnittebene?

<u>Idee:</u> • positive Linearkombinationen von Zeile von $Ax \leq b$ verändern P nicht.

• Finde solche, mit Koeff. $y \geq 0$ und

• $y^T A$ gzz.

• $y^T b$ nicht gzz.

x gzz. $\Rightarrow$ $y^T A x$ gzz.

$\Rightarrow$ $y^T A x \leq \lfloor y^T b \rfloor$ ist Schnittebene.

• Solche Schnittebenen heißen "<u>Gomory-Chvátal-Schnitte</u>"

• $P' := \bigcap_{\substack{y^T A \text{ gzz.} \\ y \geq 0}} \{x \in P \mid y^T A x \leq \lfloor y^T b \rfloor\}$ heißt Chvátal-Hülle von P.

• Iterativ: $P^{(1)} := P'$

$P^{(i+1)} := P^{(i)\,'}$.

Satz: P rationales Polyeder

$\Rightarrow$ P' rationales Polyeder und man braucht nur endlich viele Gomory-Chvátal-Schnitte zu seiner Beschreibung.

<u>Satz:</u> P rationales Polyeder

$\Rightarrow$ $P^{(k)} = P_I$ für ein endliches k.

- k heißt Chvátal-Rang von P, $P^{(k)}$ heißt <u>Chvátal-Abschluss.</u>

- Sätze gelten nicht, falls P nicht rational.

- Chvátal-Rang rationaler Polyeder ist nicht beschränkt in Dimension oder Anzahl Ecken von P.

siehe <u>Aufgabe 33</u>

$$P := \operatorname{conv}\left\{(0,0), (0,1), (k, \tfrac{1}{2})\right\}$$

Es gilt: $P^{(2k-1)} \neq P_I = P^{(2k)}$.

<u>Beweis:</u> • Wir erhalten P_I durch hinzufügen der Ungleichung $x_1 \leq 0$ zu P.

Wir zeigen 2 Aussagen:

(1) a) $x_1 + (2k-1)x_2 \leq 0$

b) $x_1 - (2k-1)x_2 \leq 2k-1$

sind Gomory-Chvátal-Schnitte für P.

aus ① folgt $\quad P_I = P^{(2k)}$

② $\quad (k-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \in P' = P^{(1)}$

aus ② folgt $\quad (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \in P^{(2k-1)} \neq P_I$

zu ①: Finde positive Linearkombination der Zeile von $Ax \leq b$, die

1) LHS $\quad 1 \quad (2k-1)$ und

2) RHS $\quad b'$ mit $\lfloor b' \rfloor = 0$ hat.

Idee: Nutze Δ-Gestalt von $Ax \leq b$ aus

ACHTUNG: $\quad y \geq 0$.

$\Rightarrow$ Suche y_1, y_2, y_3 mit $\quad y_1 \cdot \mathrm{I} + y_2 \cdot \mathrm{II} + y_3 \cdot \mathrm{III}$

$\Rightarrow \quad 1x_1 + (2k-1)x_2 \leq \alpha \quad$ mit $\quad 0 \leq \alpha < 1$.

- y_2, sodass $\quad y_2 \cdot 2k = \alpha \quad \Rightarrow \quad y_2 = \frac{\alpha}{2k} \geq 0$.

- y_1, so dass $\quad y_1 \cdot 2k - y_2 \cdot 2k = 2k - 1$

$$\Rightarrow y_1 = \frac{2k - 1 + \alpha}{2k} \geq 0$$

- y_3, so dass $\quad y_1 + y_2 - y_3 = 1$

$$\Rightarrow y_3 = 1 - \frac{1}{2k} + \frac{\alpha}{k} - 1$$

$$= \frac{\alpha}{k} - \frac{1}{2k} \overset{!}{\geq} 0$$

$\Rightarrow$ z. B. $\alpha = \frac{3}{4}$ $(\Rightarrow \lfloor \alpha \rfloor = 0)$.

$\Rightarrow (y_1, y_2, y_3)$ wie oben führt zu

$y^T A \leq \lfloor y^T b \rfloor$ ist $(1, 2k-1) \leq 0$.

1 b) analog.

<u>zu 2:</u> z: $(k - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \in P'$

- aus 1 folgt, dass falls 2 gilt, $(k-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ auch eine Ecke von P' ist.

- Es reicht zu zeigen, dass

$$(\mathrm{IV}) \qquad x_1 \leq k - \frac{1}{2} - \varepsilon$$

kein Gomory-Chvátal-Schnitt ist für jedes $\varepsilon > 0$.

allgemein G-C-Schnitt:

$$(y_1 + y_2 - y_3)x_1 + (2k y_1 - 2k y_2)x_2 \leq 2k \cdot y_2$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

<u>Ann.:</u> (IV) ist G-C-Schnitt

$$\Rightarrow \boxed{y_1 + y_2 - y_3 = 1}$$

$$2k y_1 - 2k y_2 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{y_1 = y_2}$$

$$\lfloor 2k \cdot y_2 \rfloor \leq k - \frac{1}{2} - \varepsilon \Rightarrow 2k y_2 \leq k - \frac{1}{2} - \varepsilon$$

$$\Rightarrow y_1 = \boxed{y_2 \leq \frac{k - \frac{1}{2} - \varepsilon}{2k}}$$

$$1 = y_1 + y_2 \underbrace{- y_3}_{\leq 0} \leq \frac{2k - 1 - 2\varepsilon}{2k} = 1 - \frac{1 - 2\varepsilon}{2k} < 1 \quad \lightning$$

$\square$