

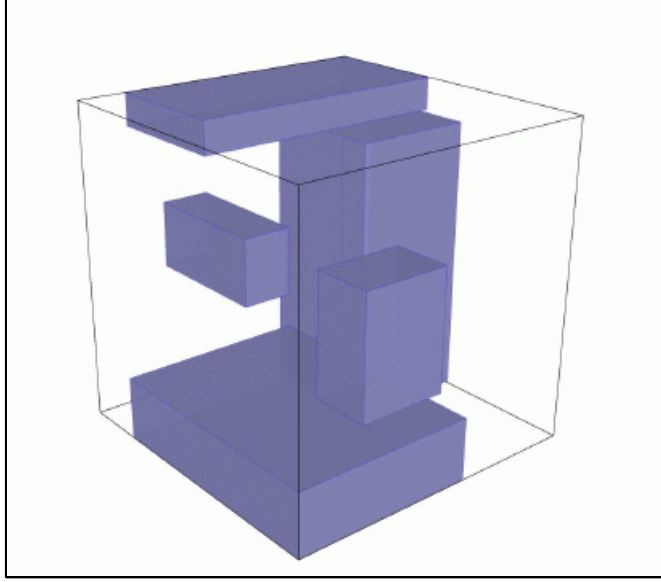
• Aufgabe 34

• Aufgabe 40

• Sequencing & Optimierung

• TSP-Polytop

Aufgabe 34



• erstmal ohne Rotation

• Variablen: vorder, unter, linker Ecke im Rechteck:

$$p_i^x, p_i^y, p_i^z \geq 0 \quad \forall i$$

Größe der Kiste

$$s^x, s^y, s^z \geq 0$$

$$\Rightarrow \text{Zielfkt.} \quad \min \quad s^x + s^y + s^z$$

• Bedingung:

$$\left. \begin{array}{l} p_i^x + x_i \leq s^x \\ \vdots \\ p_i^z + z_i \leq s^z \end{array} \right\} \forall i$$

"alle passen in Kiste"

keine Überschneidung: "Für je zwei  $i, j$  muss gelten:  $i, j$  liegen in wenigstens einer Dimension nicht hintereinander."

Für  $(i, j)$

$\Rightarrow$  6 Bedingungen mit "oder":

$$\left. \begin{array}{l} p_i^x + x_i \leq p_j^x \\ p_j^x + x_j \leq p_i^x \\ \vdots \\ p_i^z + z_i \leq p_j^z \end{array} \right\} \text{ wenigstens eine muss erfüllt sein.}$$

Idee: 6 Binärvariable  $p_{ij}^x, p_{ji}^x, \dots, p_{ij}^z \in \{0, 1\}$ ,

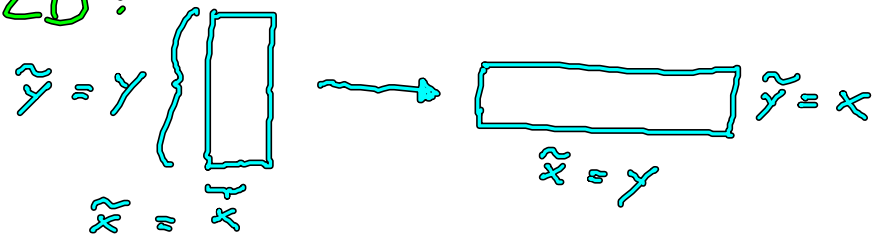
s. dass  $p = 1 \Rightarrow$  Bedingung trivial  
 $p = 0 \Rightarrow$  Bedingung wie oben.

$$\Rightarrow p_i^x + x_i \leq p_i^x + p_{ij}^x \cdot M$$

$$\text{mit z.B. } M := \sum_i (x_i + y_i + z_i).$$

$$\text{und: } p_{ij}^x + p_{ji}^x + p_{ij}^y + p_{ji}^y + p_{ij}^z + p_{ji}^z \leq 5 \quad \forall i, j$$

Rotationen: erstund 2D:



Binär variable  $G_i^{\text{rot}}, G_i^{\text{non}} \in \{0, 1\}$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} \sigma_i^{\text{rot}} + \sigma_i^{\text{non}} &= 1 \\ \tilde{x}_i &= \sigma_i^{\text{rot}} \cdot y_i + \sigma_i^{\text{non}} \cdot x_i \\ \tilde{y}_i &= \sigma_i^{\text{rot}} \cdot x_i + \sigma_i^{\text{non}} \cdot y_i \end{aligned} \right\} \forall i$$

$\Rightarrow$  Formeln Post (oben) mit  $\tilde{x}_i \dots$  statt  $x_i$ .

3D: 6 (statt 2) mögliche Lagen je Realfacet

$\Rightarrow$  6 Binärvariablen mit  $\sum = 1$ , dann wie oben.

Aufgabe 40:

#### Aufgabe 40

5 Punkte

Im *Fair Connection Game* spielen Spieler  $i \in \{1, \dots, k\}$ , die mit Start-Zielknoten-Paaren  $(s_i, t_i)$  identifiziert werden, auf einem gerichteten Graphen  $(G, E)$  mit Kantengewichten  $c_e \forall e \in E$ .

Die Strategie  $S_i$  eines Spielers  $i$  ist ein  $s_i$ - $t_i$ -Pfad. Die Kosten  $c(S_i)$  einer Strategie ergeben sich aus der fairen Aufteilung der Kosten aller verwendeten Kanten

$$c(S_i) := \sum_{e \in S_i} \frac{c_e}{|\{j : e \in S_j\}|}$$

In diesem Spiel gibt es im Allgemeinen verschiedene *Nash* oder *User Equilibria (UE)*, also Strategien  $(S_1, \dots, S_k)$  so dass kein Spieler seine Kosten durch Wahl einer anderen Strategie verbessern kann, angenommen die anderen Spieler behalten Ihre Strategien bei. Als *Price of Anarchy* bezeichnet man

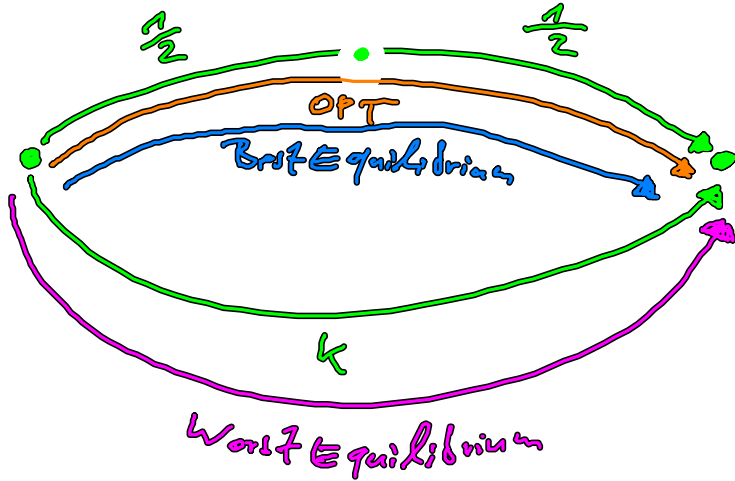
$$PoA := \frac{\max_{(S_1, \dots, S_k) \text{ ist UE}} \{\sum_{i=1, \dots, k} c(S_i)\}}{\min_{S_1, \dots, S_k} \{\sum_{i=1, \dots, k} c(S_i)\}}$$

und als *Price of Stability*

$$PoS := \frac{\min_{(S_1, \dots, S_k) \text{ ist UE}} \{\sum_{i=1, \dots, k} c(S_i)\}}{\min_{S_1, \dots, S_k} \{\sum_{i=1, \dots, k} c(S_i)\}}$$

Die Begriffe bezeichnen also das Verhältnis des Werts eines schlechtesten bzw. besten User Equilibrium zum Wert einer global optimalen Lösung des Spiels.

Findet ein kleines Beispiel für das Fair Connection Game mit  $k$  Spielern, in dem  $PoA = k$  und  $PoS = 1$ . Tipp: Es gibt Beispiele, die kleiner und einfacher sind als das Beispiel für das Braess Paradoxon aus der Übung.



## Optimierung & Separierung

OPT:  
 Input: rationales Polyeder  $Q$ ,  $c \in \mathbb{R}^n$ , so dass  $c$  auf  $Q$  nach unten beschränkt  
 Output:  $x^* \in Q$  mit  $c^T x^* = \min_{x \in Q} \{c^T x\}$

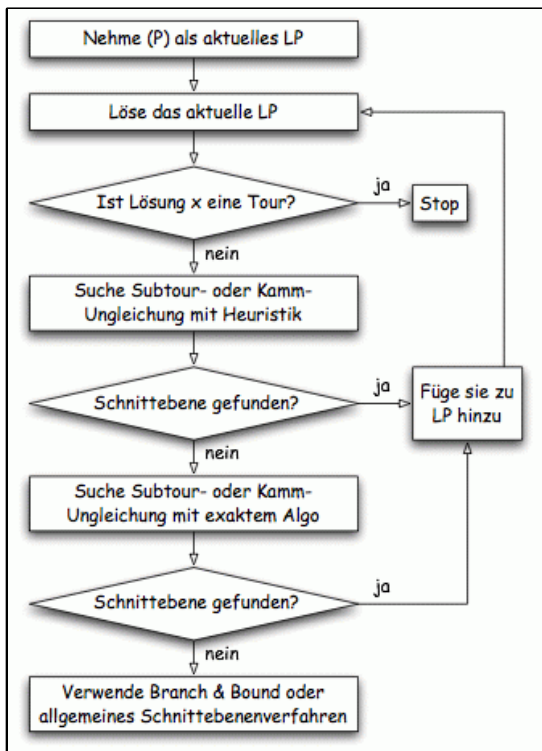
SEP:  
 Input: rationales Polyeder,  $y \in \mathbb{R}^n$   
 Output: "yes", falls  $y \in Q$   
 $d \in \mathbb{R}^n$  mit  $d^T x < d^T y \quad \forall x \in Q$  andernfalls  
 "y-separierende Hyperebene für Q"

Satz:  
 OPT polynomial lösbar über  $\mathbb{Q}$   
 $\Updownarrow$   
 SEP polynomial lösbar über  $\mathbb{Q}$

- separierte Hypereden für kombinatorische Probleme sind oft gut (heuristisch) beschreibbar



"Branch & Cut": falls (LP-)Relaxation in B&B keine gzz., zul. Lösung ist, suche sep. Hypereden zur "Stärkung" der Relaxation.



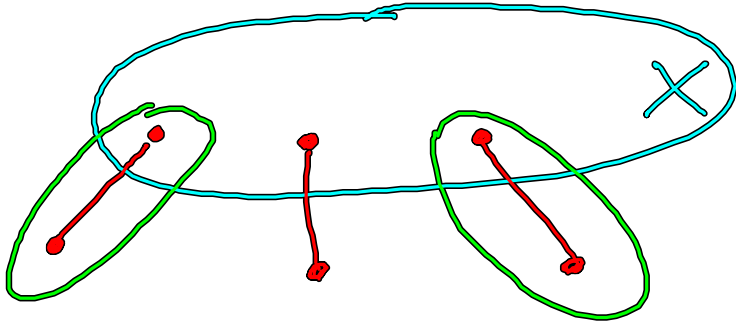
- Falls man eine vollst. fähig. Beschreibung der zul. Lösung ein kombinatorisches Problem mit lineare Ungleichungen finden kann, so heißt dies

"lineare Beschreibung"

Schritte für TSP: 2-Matching-Cuts

$$\sum_{e \in X \cup F} x_e \leq |X| + \frac{|F| - 1}{2}$$

$\forall X \subseteq V$ ,  
 $F \subseteq \delta(X)$ ,  
 $F$  Matching,  
 $|F|$  ungerade



## Satz (Grötsch, Padberg 1979):

Die Dimension des TSP-Polytops in  $K_n$   $Q_n$

ist  $\dim(Q_n) = \frac{n(n-3)}{2} \quad (= m - n)$

Beweis:

•  $\sum_{e \in E} x_e = 2 \Rightarrow n$  unabh. Ungleichungen,  
 $n$  Variable

$\Rightarrow \dim(Q_n) \leq m - n = \frac{n(n-3)}{2}$

•  $n=3 \Rightarrow$  trivial  $\triangle \Rightarrow \dim=0 = \frac{3(3-3)}{2} \checkmark$

•  $n \geq 4$ .

Lemma 1:  $E(K_{2k+1})$  kann in  $k$  disjunkte Touren  
partitioniert werh.

•  $E(K_{2k})$  kann in  $(k-1)$  disjunkte Touren  
und ein perfektes Matching partitioniert werh.

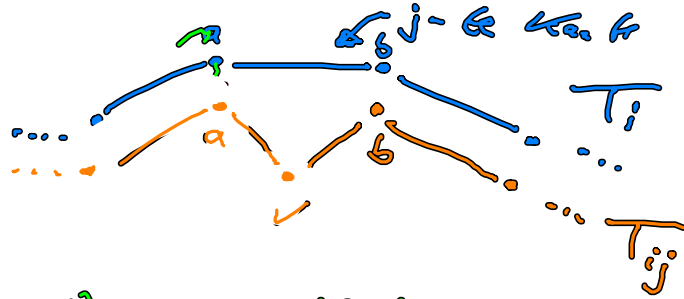
(Beweis Lemma in Aufgabe 42)

Fall 1:  $n$  gerade,  $n = 2k + 2$ .

Lemma  $\Rightarrow (V \setminus \{v\}, E)$  ist Vereinigung  $k$  disjunkter Touren  $T_i$ ,  $i = 0, \dots, k-1$

Definiere  $T_{ij}$  als die Tour, die aus  $T_i$  entsteht durch Weglassung der  $j$ -ten Kante  $\{a, b\}$  und Hinzufügen von  $\{a, v\}, \{v, b\}$ ,

$j = 1, \dots, n-1$ .



Betrachte die  $k(n-1) \times m$ -Matrix, die als Zeilen die Incidencevektoren der Touren  $T_{ij}$  hat. Betrachte die Spalte zu Kante, die nicht zu  $v$  inzident ist.

$$\left( \begin{array}{c|c} \overbrace{A \quad 0}^{n-1} & \\ \hline \vdots & \\ \underbrace{A \quad \dots \quad A}_{k(n-1) \text{ Touren } T_{ij}} & \end{array} \right)$$

mit  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$

Ersetze die  $j$ -te Kante durch zwei Kanten zu  $v$ .  
 Kante der Tour  $T_i$

$$m - (n-1) = \frac{n(n-1)}{2} - (n-1)$$

$$= (n-1) \left( \frac{n}{2} - 1 \right) = (n-1)k.$$

$\Rightarrow$  Matrix  $k(n-1)$  lin. unabh. Zeilen (und Spalten)

$\Rightarrow \exists k(n-1)$  TSP-Tour mit linear unabh. Kanten

$$\Rightarrow \dim(Q_n) \geq k(n-1) - 1 = \frac{n-2}{2}(n-1) - 1$$

$$= \frac{n(n-3)}{2}.$$

Weglass der Kante, die zu  $v$  incident sind.

Fall 2:  $n$  ungerade,  $n = 2k + 3$

(Lemma:  $\exists k$  kantendisjunkte Touren und 1 perfektes Matching)

• Gebe eine Matching  $M$ ,  $v \in M$

• analog zu Fall 1:  $k(n-1)$  disjunkte Touren

• vollständig  $M$  beliebig zu Touren, die  $v$  nicht enthält.

• Für jede der  $k+1$  Kanten in  $M$ , ersetze  $e = \{a, b\}$  durch  $\{a, v\}$  und  $\{v, b\}$

$\Rightarrow k+1$  weitere Touren.

$\Rightarrow$  alle  $k(n-1) + (k+1)$  Touren haben linear unabh. Kanten  
Kantenanzahl wie oben.

$$\Rightarrow \dim(Q_n) \geq k(n-1) + k + 1 - 1$$

$$= kn = \frac{(n-3)n}{2}$$

□



