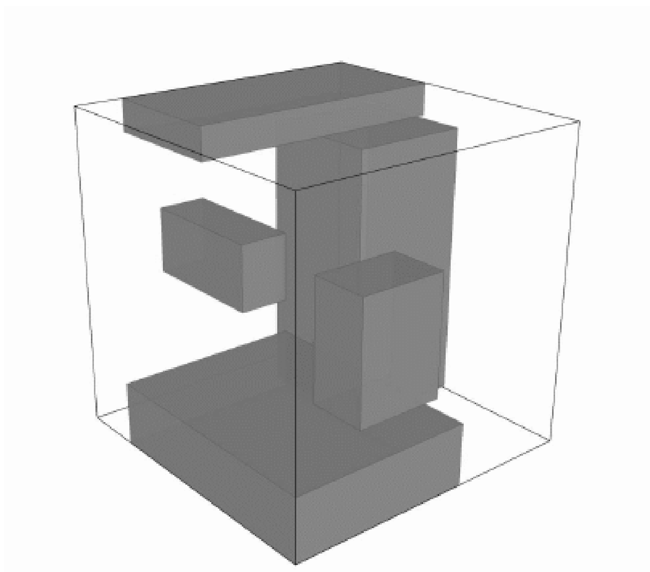
- Aufgabe 34
- Aufgabe 40
- Separierung & Optimierung
- TSP-Polytop

Aufgabe 34



- erstmal ohne Rotation
- Variablen: vordere, untere, linke Ecke von Rechteck i

$$p_i^x,\ p_i^y,\ p_i^z \geq 0 \qquad \forall i$$

Größe der Kiste

$$s^x,\ s^y,\ s^z \geq 0$$

$\Rightarrow$ Zielfkt. $\min\ s^x + s^y + s^z$

- Bedingungen:

$$\left.\begin{aligned} p_i^x + x_i &\leq s^x \\ &\vdots \\ p_i^z + z_i &\leq s^z \end{aligned}\right\} \forall i, \quad \text{„alle passen in Kiste"}$$

keine Überschneidungen: "Für je zwei i,j muss gelten: i,j liegen in wenigstens einer Dimension echt hintereinander."

Für (i,j)

$\Rightarrow$ 6 Bedingungen mit "oder":

$$\left.\begin{aligned} p_i^x + x_i &\le p_j^x \\ p_j^x + x_j &\le p_i^x \\ &\vdots \\ p_j^z + z_j &\le p_i^z \end{aligned}\right\} \text{ wenigstens \underline{eine} muss erfüllt sein.}$$

Idee: 6 Binärvariablen $\rho_{ij}^x, \rho_{ji}^x, \ldots, \rho_{ji}^z \in \{0,1\}$,

so dass $\rho = 1 \Rightarrow$ Bedingung trivial

$\rho = 0 \Rightarrow$ Bedingung wie oben.

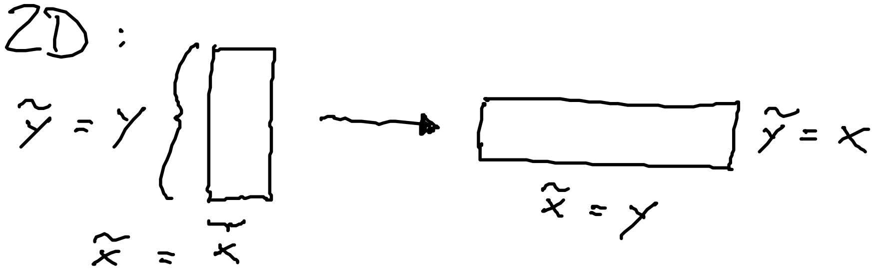
$$\Rightarrow \quad p_i^x + x_i \le p_j^x + \rho_{ij}^x \cdot M$$

$$\vdots$$

mit z.B. $M := \sum_i (x_i + y_i + z_i)$.

und: $\rho_{ij}^x + \rho_{ji}^x + \rho_{ij}^y + \rho_{ji}^y + \rho_{ij}^z + \rho_{ji}^z \le 5 \quad \forall\, i,j$

Rotationen: erstmal 2D:



Binärvariablen $\sigma_i^{rot}, \sigma_i^{non} \in \{0,1\}$

$$\Rightarrow \quad \sigma_i^{rot} + \sigma_i^{non} = 1$$

$$\tilde{x}_i = \sigma_i^{rot} \cdot y_i + \sigma_i^{non} \cdot x_i$$

$$\tilde{y}_i = \sigma_i^{rot} \cdot x_i + \sigma_i^{non} \cdot y_i \qquad \forall i$$

$\Rightarrow$ Formulier Rest (oben) mit $\tilde{x}_i$ ... statt x_i.

3D: 6 (statt 2) mögliche Lagen je Rechteck

$\Rightarrow$ 6 Binärvariablen mit $\Sigma = 1$, dann wie oben.

Aufgabe 40:

Aufgabe 40 **5 Punkte**

Im *Fair Connection Game* spielen *Spieler* $i \in \{1, \ldots, k\}$, die mit Start-Zielknoten-Paaren (s_i, t_i) identifiziert werden, auf einem gerichteten Graphen (G, E) mit Kantengewichten $c_e \forall\ e \in E$.

Die *Strategie* S_i einer Spielers i ist ein s_i-t_i-Pfad. Die Kosten $c(S_i)$ einer Stragie ergeben sich aus der fairen Aufteilung der Kosten aller verwendeten Kanten

$$c(S_i) := \sum_{e \in S_i} \frac{c_e}{|\{j : e \in S_j\}|}.$$

In diesem Spiel gibt es im Allgemeinen verschiedene *Nash* oder *User Equilibria (UE)*, also Strategien $(S_1, \ldots, S_k)$ so dass kein Spieler seine Kosten durch Wahl einer anderen Strategie verbessern kann, **angenommen die anderen Spieler behalten Ihre Strategien bei**. Als *Price of Anarchy* bezeichnet man

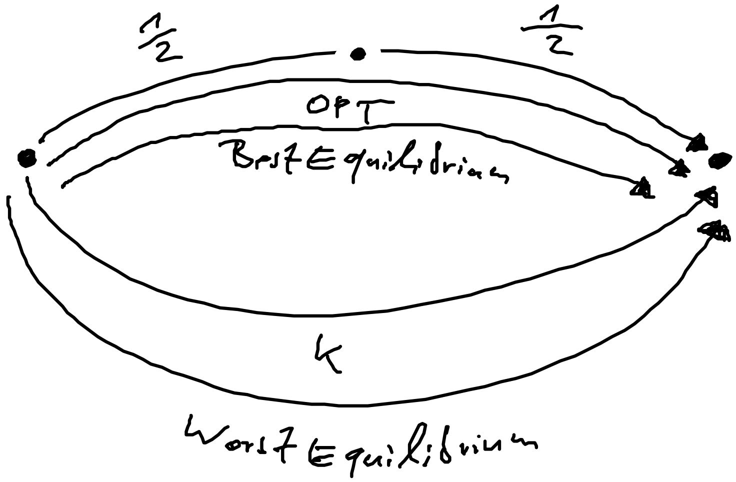
$$PoA := \frac{\max_{(S_1,\ldots,S_k) \text{ ist } UE}\{\sum_{i=1,\ldots,k} c(S_i)\}}{\min_{S_1,\ldots,S_k}\{\sum_{i=1,\ldots,k} c(S_i)\}}$$

und als *Price of Stability*

$$PoS := \frac{\min_{(S_1,\ldots,S_k) \text{ ist } UE}\{\sum_{i=1,\ldots,k} c(S_i)\}}{\min_{S_1,\ldots,S_k}\{\sum_{i=1,\ldots,k} c(S_i)\}}.$$

Die Begriffe bezeichnen also das Verhältnis des Werts eines schlechtesten bzw. besten User Equilibrium zum Wert einer global optimalen Lösung des Spiels.

Findet ein kleines Beispiel für das Fair Connection Game mit k Spielern, in dem $PoA = k$ und $PoS = 1$. Tipp: Es gibt Beispiele, die kleiner und einfacher sind als das Beispiel für das Braess Paradoxon aus der Übung.



Optimierung & Separierung

OPT: Input: rationales Polyeder Q, $c \in \mathbb{R}^n$, so dass c auf Q nach unten beschränkt

Output: $x^* \in Q$ mit $c^T x^* = \min_{x \in Q} \{c^T x\}$

SEP: Input: rationales Polyeder, $y \in \mathbb{R}^n$

Output: "yes", falls $y \in Q$

$d \in \mathbb{R}^n$ mit $d^T x < d^T y$ $\forall x \in Q$ andernfalls.

"y-separierende Hyperebene für Q"

Satz: OPT polynomiell lösbar über Q

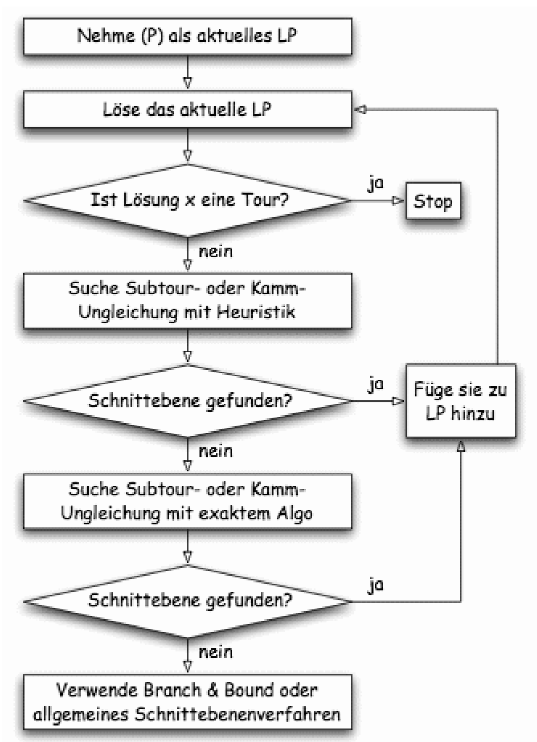
$\Updownarrow$

SEP polynomiell lösbar über Q

• separierende Hyperebenen für kombinatorische Probleme sind oft gut (heuristisch) berechenbar

$\Downarrow$

"Branch & Cut": Falls (LP-)Relaxation in B&B keine ganzz. zul. Lösung ist, suche sep. Hyperebene zur "Stärkung" der Relaxation.

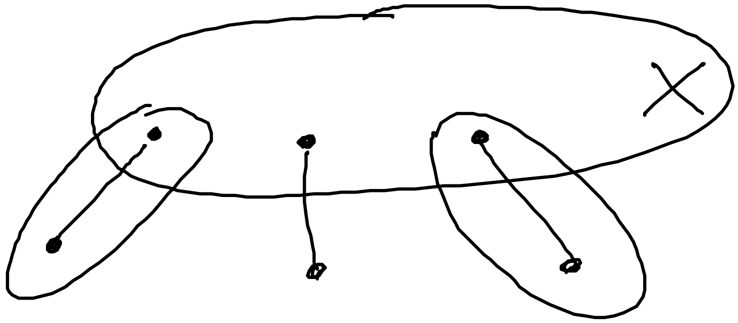


• Falls man eine vollständige Beschreibung der zul. Lösungen eines kombinatorischen Problems mit linearen Ungleichungen finden kann, so heißt dies

<u>"lineare Beschreibung"</u>

Schnitte für TSP: <u>2-Matching-Cuts</u>

$$\sum_{e\in X\times X \cup F} x_e \le |X| + \frac{|F|-1}{2} \qquad \forall X\subseteq V,\ F\subseteq \delta(X),\ F \text{ Matching},\ |F| \text{ ungerade}$$



Satz (Grötschel, Padberg 1979):

Die Dimension des TSP-Polytops im K_n Q_n ist

$$\dim(Q_n) = \frac{n(n-3)}{2} \quad (= m - n).$$

Beweis:

- $\sum_{e \in \delta(v)} x_e = 2 \implies$ n unabh. Ungleichungen, m Variablen

$$\implies \dim(Q_n) \le m - n = \frac{n(n-3)}{2}.$$

- $n = 3 \implies$ trivial  $\implies \dim = 0 = \frac{3(3-3)}{2}$ ✓
- $n \geq 4$.

Lemma:

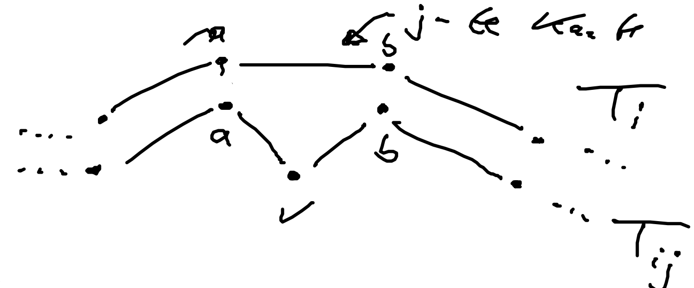
- $E(K_{2k+1})$ kann in k disjunkte Touren partitioniert werden.
- $E(K_{2k})$ kann in $(k-1)$ disjunkte Touren und ein perfektes Matching partitioniert werden.

(Beweis Lemma in Aufgabe 42)

Fall 1: n gerade, $n = 2k+2$.

Lemma $\Rightarrow$ $(V \setminus \{v\}, E)$ ist Vereinigung k disjunkter Touren T_i, $i = 0, \dots, k-1$

Definiere T_{ij} als die Tour, die aus T_i entsteht durch Weglassen der j-ten Kante $\{a,b\}$ und hinzufügen von $\{a,v\}$, $\{v,b\}$, $j = 1, \dots, n-1$.



• Betrachte die $k(n-1) \times m$ - Matrix, die als Zeilen die Inzidenzvektoren der Touren T_{ij} hat. Betrachte die Spalten zu Kanten, die nicht zu v inzident sind.

$$k(n-1)\left\{ \left(\begin{array}{cccc} \overbrace{A}^{n-1} & 0 & & 0 \\ & A & & \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & A \end{array} \right) \right. \begin{array}{l} \} \text{ erste } (n-1) \text{ Touren } T_{i1} \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

mit
$$A = \left(\begin{array}{cccc} 0 & & & 1 \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ 1 & & & 0 \end{array} \right) \Big\} \text{ Kanten der Tour } T_i$$

Ersetzen der j-ten Kante durch zwei Kanten zu und von v.

$$m - (n-1) = \frac{n(n-1)}{2} - (n-1)$$
$$= (n-1)\left(\frac{n}{2} - 1\right) = (n-1)k.$$

$\Rightarrow$ Matrix $k(n-1)$ lin. unabh. Zeilen (und Spalten)

$\Rightarrow \exists\ k(n-1)$ TSP-Touren mit linear unabh. Inzidenzvektoren

$$\Rightarrow \dim(Q_n) \geq k(n-1) \underbrace{-1}_{} = \frac{n-2}{2}(n-1) - 1$$

$$= \frac{n(n-3)}{2}.$$

Weglassen der Kanten, die zu v inzident sind.

<u>Fall 2:</u> n ungerade, $n = 2k+3$

(Lemma: $\exists\ k$ kantendisjunkte Touren und 1 perfektes Matching)

- betrachte $V \setminus \{v\}$, v beliebig
- analog zu Fall 1: $k(n-1)$ disjunkte Touren
- vervollständige M beliebig zu Tour, die v nicht enthält.
- Für jede der $k+1$ Kanten in M, ersetze $e = \{a,b\}$ durch $\{a,v\}$ und $\{v,b\}$

$\Rightarrow k+1$ weitere Touren.

$\Rightarrow$ alle $k(n-1) + (k+1)$ Touren haben lin. unabh. Inzidenzvektoren wie oben.

$$\Rightarrow \dim(Q_n) \geq k(n-1) + k + 1 - 1$$

$$= kn = \frac{(n-3)n}{2}$$

$\square$