

Aufgabe 42

6 Punkte

Bezeichne K_n den vollständigen ungerichteten Graphen auf n Knoten. Beweist folgendes Lemma, welches für den Beweis verwendet werden kann, dass das Polytop, das die konvexe Hülle aller Touren in K_n beschreibt, genau Dimension $\frac{n(n-3)}{2}$ hat:

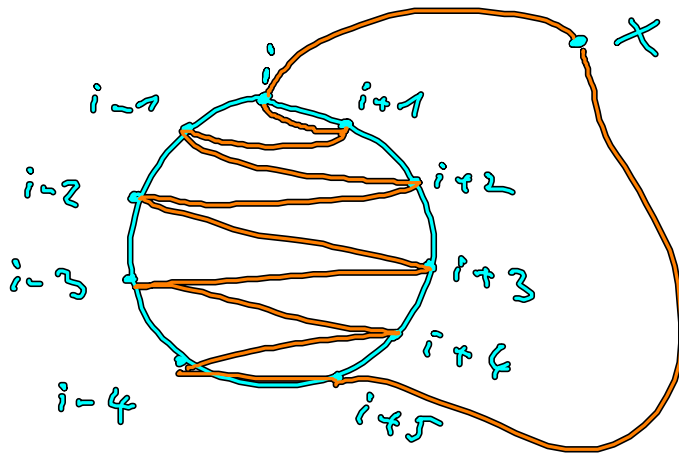
Für jedes $k \geq 1$ gilt

- (a) Die Kantenmenge von K_{2k+1} kann in k disjunkte Touren partitioniert werden.
- (b) Die Kantenmenge von K_{2k} kann in $k-1$ disjunkte Touren und ein perfektes Matching partitioniert werden.

9) nummeriere Knoten $0, 1, \dots, 2k-1, x$

$\forall i = 0, \dots, k-1$ definiere

$$T_i := (x, i, i+1, i-1, i+2, i-2, \dots, i+(k-1), i-(k-1), i+k, x)$$



Z: T_i, T_j disjunkt für $i \neq j$

- Knoten i nicht an x ✓
- sonst: $\{a, b\} \in T_i \Rightarrow a+b \in \{2i, 2i+1\}$

LPs in Standardform:

• mit $c^T x$
 $Ax = b$
 $x \geq 0$

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

• Äquivalenz alle anderen Form:

- Schlupfvariablen
- $x = x^+ - x^-$

3.12 Satz (Hauptsatz der Linearen Optimierung)

- Jede Instanz von LP nimmt das Optimum in einer zulässigen Basislösung an.
- Jede Konvexkombination optimaler zulässiger Basislösungen ist optimal.

BL:

- in lin. unabh. Spalte von $A \rightarrow B$.
- nur Variable zu $B \neq 0$.

3.10 Satz (Interpretation der Ecken in den drei Sichten)

Sei P ein Polytop und $S = \{x \mid Ax = b, x \geq 0\}$ die zugehörige zulässige Menge eines LP in Standardform.

Sei $y' = (y_1', \dots, y_{n-m}')^T \in P$ und $y = (y_1, \dots, y_n)^T \in S$ der zugehörige Vektor gemäß (3.7)

Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (1) y' ist eine Ecke von P
- (2) y' ist nicht als strikte Konvexkombination anderer Punkte aus P darstellbar
- (3) y ist zulässige Basislösung von S

• Simplex-Algorithmus \leftrightarrow lokale Suche auf BLs.

• Nachbarschaft: Jede Spalte von A ist als Linearkombination von Spalten von B darstellbar.

$$y \text{ BL} \Rightarrow Ay = b$$

$$\exists x_{ij}: A_j = \sum_{i=1}^m A_{B(i)} \cdot x_{ij}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^m A_{B(i)} (y_{B(i)} - \theta x_{ij}) + \theta A_j = b \quad \forall \theta$$

• $x \geq 0$!

$$\Rightarrow \theta_0 := \min \left\{ \frac{y_{B(i)}}{x_{ij}} : x_{ij} > 0, i=1, \dots, m \right\}$$

\Rightarrow • j verlässt die Basis

• mind. eine Spalte verlässt die Basis

• alle $BV \geq 0 \Rightarrow$ eine Lösung ist zul. BL.

• Organisation in Tabellen \rightarrow bring B auf E_m .

• Kostenminimierung bei Basiswechsel: $\theta \cdot \bar{c}_j$ mit

$$\bar{c}_j = c_j - \sum_{i=1}^m x_{ij} c_{Bi}$$

3.14 Satz (Optimalitätskriterium)

Sei x zulässige Basislösung zur Basis B . Dann gilt

(1) Ein Pivotschritt, bei dem x_j in die Basis kommt, ändert die Kosten um den Betrag

$$\theta_0 \bar{c}_j = \theta_0 (c_j - z_j) \quad (3.19)$$

(2) Gilt

$$\bar{c} = c - z \geq 0 \quad (3.20)$$

d.h. sind alle reduzierten Kostenkoeffizienten nichtnegativ, so ist x optimal.

(27): "Die oben definierte Nachbarschaft für eine lokale Suche auf Basislösungen ist erzählt."

• Pivotregel & Kreiseln \rightarrow lexikographische Regel
 \rightarrow Bland
 \rightarrow größter relativer Abstieg
 \rightarrow größter absoluter Abstieg

• Phase I: Löse

$$\begin{aligned} \text{mit } 1^T \xi \\ Ax + \xi = b \\ x, \xi \geq 0 \end{aligned}$$

• BL trivial
• Optimierung mit x in Basis
 \Rightarrow Startbasis

Dualität

Optimalität \iff Zulässigkeit
Zulässigkeit \iff Optimalität

Primal		Dual
$\min c^T x$		$\max \pi^T b$
$a_i^T x = b_i$	$i \in M$	π_i beliebig
$a_i^T x \geq b_i$	$i \in \bar{M}$	$\pi_i \geq 0$
$x_j \geq 0$	$j \in N$	$\pi^T A_j \leq c_j$
x_j beliebig	$j \in \bar{N}$	$\pi^T A_j = c_j$

• dual dual = primal

4.2 Satz (Schwacher und Starker Dualitätssatz)

- Sei x primal zulässig und π dual zulässig. Dann gilt (**schwacher Dualitätssatz**)
 $c^T x \geq \pi^T b$ (4.7)
- Hat ein LP eine optimale Lösung, so auch das duale, und die Optimalwerte sind gleich (**starker Dualitätssatz**)

4.4 Satz (Komplementärer Schlupf)

- Sei x primal zulässig und π dual zulässig. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:
 - x, π sind optimal (primal bzw. dual)
 - $u_i := \pi_i \cdot (a_i^T x - b_i) = 0$ für alle $i = 1, \dots, m$ (4.8)
 - $v_j := (c_j - \pi^T A_j) \cdot x_j = 0$ für alle $j = 1, \dots, n$ (4.9)
 - d.h. : (Schlupf primaler/dualer Restriktion) \cdot (Wert zugehöriger dualer/primaler Variable) = 0

\hookrightarrow primal-dual (Approximations-)Algorithmen

4.5 Satz (Farkas Lemma)

Seien $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}^n$ und $c \in \mathbb{R}^n$. Dann sind äquivalent

(1) für alle $y \in \mathbb{R}^n$ gilt: $y^T a_i \geq 0$ für alle $i = 1, \dots, m \Rightarrow y^T c \geq 0$

d.h. für alle y gilt:

y hat nichtnegative Projektion auf alle a_i

$\Rightarrow y$ hat nichtnegative Projektion auf c

(2) $c \in C(a_1, \dots, a_m)$


d.h. c liegt im von a_1, \dots, a_m erzeugten Kegel

↳ ILP: \exists zul. Lösung, gültige Ungleichungen
 (• in Wesentl. äquivalent zur starken DS.)
 (• "Alternativsätze")

• duale Information in Tableau
 \Rightarrow duales Simplexalgorithmus

• revidiertes Simplexverfahren

$-z'$	$-\pi^T$	
b'	B^{-1}	


 $CARRY^{(k)}$

mit

- $\pi^T =$ duale Lösung wegen (4.12), i.a. unzulässig.
Die Werte π_i werden auch Simplexmultiplikatoren genannt.
- $b' = B^{-1}b$ momentane rechte Seite
- $z' = c^T B^{-1}b$ momentaner primaler Zielfunktionswert

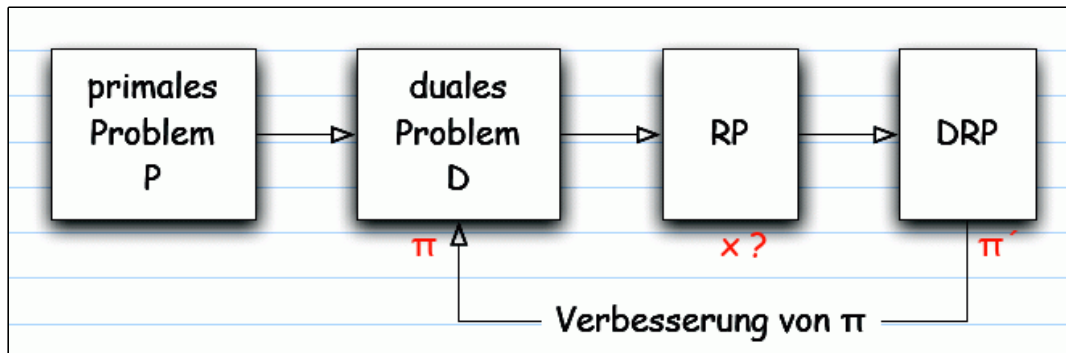
• \rightarrow "Column Generation"

\rightarrow erzeugen Spalte (Variable) mit neg. red. Kosten und Bedarf

• Simplex-Algorithmus mit Schranken

→ modifizierter Vektor in Θ in Pivot-Schritt

Primal-Dual Algorithmus



$$J := \{j = 1, \dots, n \mid \pi^T A_j = c_j\}$$

• RP: $\exists x: Ax = b, x_j = 0 \forall j \notin J$

⇒ Zulässigkeitsproblem, Phase I

Fall kein solches x existiert $\rightarrow \sum_{0 < \theta} > 0$

⇒ π' optimal für dual
 d., RP, DRP.

• DRP:

max	$w = \pi^T b$	(6.2)	} (DRP)
unter	$\pi^T A_j \leq 0 \quad j \in J$	(6.3)	
	$\pi_i \leq 1 \quad i = 1, \dots, m$	(6.4)	
	$\pi_i \text{ beliebig } i = 1, \dots, m$	(6.5)	

$$\pi^* := \pi + \theta \cdot \pi'$$

$$\Rightarrow \pi^{*T} b = \pi^T b + \theta \cdot \underbrace{\pi'^T b}_{> 0} > \pi^T b$$

- θ so wähl, dass π^T zulässig für DP, also $\pi^T A_j \leq c_j$ $\forall j$
- $\Rightarrow \theta := \min_{j \in J} \frac{c_j - \pi^T A_j}{\pi^T A_j}$

→ Lösung von LP durch Folge von Phase I-Lösungen eines linearen Problems.

⇒ Bsp.: Transport Problem, Weighted Matching, Shortest Path.

ILP

- Modellierungsmöglichkeiten!
- NP vollständig
- vollständig unimodulare Matrizen: jede nicht-singuläre quadratische Teilmatrix hat $\det \in \{-1, 1\}$. (TUM)
- $\left. \begin{array}{l} A \text{ TUM,} \\ b \text{ ganzz.} \end{array} \right\} \Rightarrow$ Ecken von $Ax = b$ - Polyeder sind ganzz.
- \Rightarrow Simplex-ALgo führt ganzz. Lösung.

7.5 Satz (Ein hinreichendes Kriterium für vollständige Unimodularität)

- Eine Matrix A mit Einträgen $a_{ij} \in \{-1, 0, 1\}$ ist vollständig unimodular, falls sie folgende Bedingungen erfüllt
 - (1) A hat pro Spalte maximal 2 Einträge $\neq 0$
 - (2) Die Zeilen von A können in zwei disjunkte Mengen I_1, I_2 aufgeteilt werden mit
 - Für jede Spalte mit 2 Einträgen $\neq 0$ und **gleichem** Vorzeichen liegen die zugehörigen Zeilen in **verschiedenen** I_j
 - Für jede Spalte mit 2 Einträgen $\neq 0$ und **verschiedenen** Vorzeichen liegen die zugehörigen Zeilen in **demselben** I_j

7.6 Korollar (Wichtige vollständig unimodulare Matrizen)

- Jedes LP in Standardform oder kanonischer Form, dessen Koeffizientenmatrix gleich der
 1. Knoten-Kanten Inzidenzmatrix eines Digraphen
 2. Knoten-Kanten Inzidenzmatrix eines bipartiten Graphenist, hat nur ganzzahlige optimale Basislösungen (bei ganzzahliger rechter Seite b).
- Hierzu gehören u.A. die LP Formulierungen des
 - Kürzeste-Wege-Problem
 - Max-Fluss-Problem
 - Transportproblem

• Branch & Bound → sukzessive Aufteilung der Zulässigkeitsmenge "Branching"
→ Vermeidung von unterm Scherchen aus einer Relation zum Abschneiden uninteressanter Teile: "Bounding".

• Lagrange-Relaxation

7.16 Satz (Beziehung zwischen Lagrange Relaxation und LP Relaxation)

- $\max_{\lambda} L(\lambda) \geq z(LP)$
- Gleichheit gilt falls das von $Bx \geq d$ erzeugte Polyeder ganzzahlig ist (also die Ganzzahligkeitsbedingung in (LR_{λ}) weggelassen werden kann).

• LP-Relaxation wie oben als Lagrange-Relaxation.

⇒ LR ist interessant in B & T

und: Lösung von LR oft leichter kombinatorisch oder als LP: analytisches Problem.

• Schnittstellungsverfahren

- gzz. Hülle P_I von Zulässigkeitsmenge P ist konvexe Hülle der gzz. Punkte von P

• Gomory-Chvátal-Schnitt:

$y \geq 0$ mit $y^T A$ ganzz., $y^T b$ nicht-ganzz.

$\Rightarrow y^T A x \leq \lfloor y^T b \rfloor$ ist gültig.

• $P^{(k)} := \bigcap \{x \in P \mid y^T A x \leq \lfloor y^T b \rfloor\}$
mit $y^T A$ ganzz., $y \geq 0$ ← erhält viele Zusätze

liefert gute Chvátal-Hülle von P

• Chvátal-Abchluss:

7.24 Satz (Die Hüllenbildung ist endlich)

Sei P ein rationales Polytop. Dann existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit $P_I = P^{(k)}$.

Insbesondere terminiert das Schnittebenenverfahren bei geeigneter Auswahl von Gomory Chvátal Schnitten nach endlich vielen Schritten.

• man erhält in endlich vielen Schritten eine lineare Beschreibung von P_I .

• Polymere kombinatorische Optimierungsprobleme

- Matching
- Antiketten problem
- TSP

• LP-basierte Approximationsalgorithmen

- (randomisierter) Rucksack, z.B. Max-SAT
- primal-dual, z.B. Network-Design

