Aufgabe 42 **6 Punkte**

Bezeichne K_n den vollständigen ungerichteten Graphen auf n Knoten. Beweist folgendes Lemma, welches für den Beweis verwendet werden kann, dass das Polytop, das die konvexe Hülle aller Touren in K_n beschreibt, genau Dimension $\frac{n(n-3)}{2}$ hat:

Für jedes $k \geq 1$ gilt

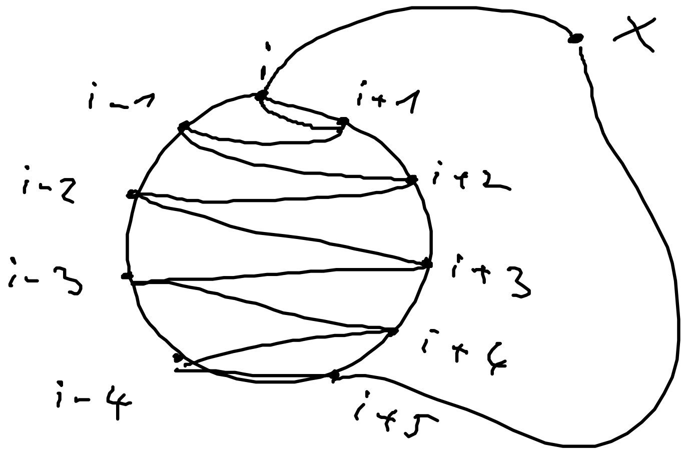
(a) Die Kantenmenge von K_{2k+1} kann in k disjunkte Touren partitioniert werden.

(b) Die Kantenmenge von K_{2k} kann in $k-1$ disjunkte Touren und ein perfektes Matching partitioniert werden.

a) nummeriere Knoten $0, 1, \ldots, 2k-1, x$

$\forall i = 0, \ldots, k-1$ definiere

$$T_i := (x, i, i+1, i-1, i+2, i-2, \ldots, i+(k-1), i-(k-1), i+k, x)$$



Z: T_i, T_j disjunkt für $i \neq j$

- Kante inzident zu x ✓
- sonst: $\{a, b\} \in T_i \Rightarrow a+b \in \{2i, 2i+1\}$

LPs in Standardform:

- $\min c^T x$
  $Ax = b$
  $x \geq 0$ $\qquad A \in \mathbb{R}^{m \times n}$
- Äquivalenz aller anderen Formen:
  - Schlupfvariable
  - $x = x^+ - x^-$

3.12 Satz (Hauptsatz der Linearen Optimierung)

- Jede Instanz von LP nimmt das Optimum in einer zulässigen Basislösung an.
- Jede Konvexkombination optimaler zulässiger Basislösungen ist optimal.

BL: • m lin. unabh. Spalten von $A \to B$.

• nur Variablen zu $B \neq 0$.

3.10 Satz (Interpretation der Ecken in den drei Sichten)

Sei P ein Polytop und $S = \{ x \mid Ax = b, x \geq 0 \}$ die zugehörige zulässige Menge eines LP in Standardform.
Sei $y' = (y_1', \ldots, y_{n-m}')^T \in P$ und $y = (y_1, \ldots, y_n)^T \in S$ der zugehörige Vektor gemäß (3.7)
Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (1) y' ist eine Ecke von P
- (2) y' ist nicht als strikte Konvexkombination anderer Punkte aus P darstellbar
- (3) y ist zulässige Basislösung von S

• Simplex-Algo $\longleftrightarrow$ lokale Suche auf BLs.

• Nachbarschaft: Jede Spalte von A ist als Linearkombination von Spalten von B darstellbar.

$$y \text{ BL} \Rightarrow Ay = b$$

$$\exists x_{ij}: \quad A_j = \sum_{i=1}^{m} A_{B(i)} \cdot x_{ij}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{m} A_{(B(i))} \left(y_{B(i)} - \Theta x_{ij} \right) + \Theta A_j = b \qquad \forall \Theta$$

$$\bullet\ x \geq 0\ !$$

$$\Rightarrow \Theta_0 := \min \left\{ \frac{y_{B(i)}}{x_{ij}} : x_{ij} > 0,\ i = 1, \ldots, m \right\}$$

$\Rightarrow$ • j wechselt in Basis

• mind. eine Spalte verlässt die Basis

- alle BV ≥ 0 => neue Lösg ist zul. BL.

- Organisation in Tableau $\rightsquigarrow$ bringe B auf E_m.

- Kostenveränderung bei Basiswechsel: $\Theta \cdot \bar{c}_j$ mit

$$\bar{c}_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} x_{ij} c_{B(i)}$$

3.14 Satz (Optimalitätskriterium)

Sei x zulässige Basislösung zur Basis B. Dann gilt

(1) Ein Pivotschritt, bei dem x_j in die Basis kommt, ändert die Kosten um den Betrag

$$\theta_0 \bar{c}_j = \theta_0 (c_j - z_j) \qquad (3.19)$$

(2) Gilt

$$\bar{c} = c - z \geq 0 \qquad (3.20)$$

d.h. sind alle reduzierten Kostenkoeffizienten nichtnegativ, so ist x optimal.

(2): "Die oben definierte Nachbarschaft für eine lokale Suche auf Basislösungen ist exakt."

- Pivotregeln & Kreiseln → lexikografische Regel; → Bland

  Pivotregeln → größter relativer Abstieg; → größter absoluter Abstieg

- Phase I: Löse

$$\min \mathbb{1}^T \xi$$
$$Ax + \xi = b$$
$$x, \xi \geq 0$$

- BL trivial
- Optimallösg mit nur x in Basis => Startbasis

Dualität

Optimalität $\longleftrightarrow$ Zulässigkeit

Zulässigkeit $\longleftrightarrow$ Optimalität

Primal		Dual
$\min c^T x$		$\max \pi^T b$
$a_i^T x = b_i$	$i \in M$	π_i beliebig
$a_i^T x \geq b_i$	$i \in \overline{M}$	$\pi_i \geq 0$
$x_j \geq 0$	$j \in N$	$\pi^T A_j \leq c_j$
x_j beliebig	$j \in \overline{N}$	$\pi^T A_j = c_j$

- dual dual = primal

4.2 Satz (Schwacher und Starker Dualitätssatz)

- Sei x primal zulässig und π dual zulässig. Dann gilt (schwacher Dualitätssatz)
  $c^T x \geq \pi^T b$ (4.7)
- Hat ein LP eine optimale Lösung, so auch das duale, und die Optimalwerte sind gleich (starker Dualitätssatz)

4.4 Satz (Komplementärer Schlupf)

- Sei x primal zulässig und π dual zulässig. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:
  - x, π sind optimal (primal bzw. dual)
  - $u_i := \pi_i \cdot (a_i^T x - b_i) = 0$ für alle $i = 1, \ldots, m$ (4.8)
    $v_j := (c_j - \pi^T A_j) \cdot x_j = 0$ für alle $j = 1, \ldots, n$ (4.9)
    d.h. : (Schlupf primaler/dualer Restriktion)·(Wert zugehöriger dualer/primaler Variable) = 0

$\hookrightarrow$ primal-duale (Approximations-)Algorithmen

4.5 Satz (Farkas Lemma)

Seien $a_1, \ldots, a_m \in R^n$ und $c \in R^n$. Dann sind äquivalent

(1) für alle $y \in R^n$ gilt: $y^T a_i \geq 0$ für alle $i = 1,\ldots m$ => $y^T c \geq 0$

d.h. für alle y gilt:

y hat nichtnegative Projektion auf alle a_i

=> y hat nichtnegative Projektion auf c

(2) $c \in C(a_1, \ldots, a_m)$

d.h. c liegt im von $a_1, \ldots, a_m$ erzeugten Kegel

↳ • ILP: ∃ zul. Lösung, gültige Ungleichungen

(• im Wesentlichen äquivalent zum starken DS.

• "Alternativsätze")

• duale Information im Tableau

⇒ dualen Simplexalgorithmus

• revidiertes Simplexverfahren

$-z'$	$-\pi^T$	
b'	B^{-1}	

$\longleftarrow \text{CARRY}^{(\ell)} \longrightarrow$

mit

- π^T = duale Lösung wegen (4.12), i.a. unzulässig.
  Die Werte π_i werden auch Simplexmultiplikatoren genannt.
- $b' = B^{-1}b$ momentane rechte Seite
- $z' = c_B^T B^{-1} b$ momentaner primaler Zielfunktionswert

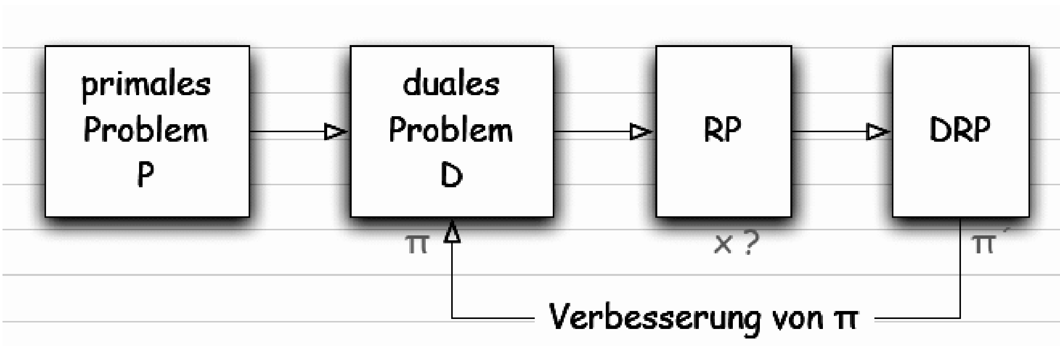
• → "Column Generation"

→ erzeuge Spalten (Variablen) mit neg. rel. Kosten nach Bedarf

• Simplex-Algorithmus mit Schranken

→ modifizierte Wahl von Θ_0 in Pivotschritt

Primal-Duale Algorithmen



$$J := \{ j = 1, \ldots, n \mid \pi^T A_j = c_j \}$$

• RP: $\exists x : Ax = b, \quad x_j = 0 \quad \forall j \notin J$

$\Rightarrow$ Zulässigkeitsproblem, Phase I

Falls kein solches x existiert $\rightarrow \xi_{opt} > 0$

$\Rightarrow \pi'$ optimal für duale des RP, DRP.

• DRP:

max	$w = \pi^T b$			(6.2)	
unter	$\pi^T A_j \leq 0$		$j \in J$	(6.3)	(DRP)
	$\pi_i \leq 1$		$i = 1, \ldots, m$	(6.4)	
	π_i	beliebig	$i = 1, \ldots, m$	(6.5)	

$$\pi^* := \pi + \Theta \cdot \pi'$$

$$\Rightarrow \pi^{*T} b = \pi^T b + \Theta \cdot \underbrace{\pi'^T b} > \pi^T b$$

• Θ so wählen, dass π^* zulässig für DP, also $\pi^{*T} A_j \le c_j \quad \forall j$

$\Rightarrow \Theta := \min\limits_{j \notin J} \dfrac{c_j - \pi^T A_j}{\underbrace{\pi'^T A_j}_{>0}}$.

⇝ Lösung von LP durch Folge von Phase I - Lösungen eines kleineren Problems.

⇒ Bsp.: Transport Problem, Weighted Matching, Shortest Path.

ILP

• Modellierungsmöglichkeiten!

• NP vollständig

• vollständig unimodulare Matrizen (TUM): jede nicht-singuläre quadratische Teilmatrix hat $\det \in \{-1, 1\}$.

• $\left.\begin{matrix} A \text{ TUM}, \\ b \text{ ganzz.} \end{matrix}\right\}$ ⇒ Ecken von $Ax = b$ - Polyeder sind ganzz.
⇒ Simplex-Algo findet ganzz. Lösungen.

7.5 Satz (Ein hinreichendes Kriterium für vollständige Unimodularität)

- Eine Matrix A mit Einträgen $a_{ij} \in \{-1, 0, 1\}$ ist vollständig unimodular, falls sie folgende Bedingungen erfüllt
  - (1) A hat pro Spalte maximal 2 Einträge ≠ 0
  - (2) Die Zeilen von A können in zwei disjunkte Mengen I_1, I_2 aufgeteilt werden mit
    - Für jede Spalte mit 2 Einträgen ≠ 0 und gleichem Vorzeichen liegen die zugehörigen Zeilen in verschiedenen I_j
    - Für jede Spalte mit 2 Einträgen ≠ 0 und verschiedenen Vorzeichen liegen die zugehörigen Zeilen in demselben I_j

7.6 Korollar (Wichtige vollständig unimodulare Matrizen)

- Jedes LP in Standardform oder kanonischer Form, dessen Koeffizientenmatrix gleich der
  1. Knoten-Kanten Inzidenzmatrix eines Digraphen
  2. Knoten-Kanten Inzidenzmatrix eines bipartiten Graphen

  ist, hat nur ganzzahlige optimale Basislösungen (bei ganzzahliger rechter Seite b).
- Hierzu gehören u.A. die LP Formulierungen des
  - Kürzeste-Wege-Problem
  - Max-Fluss-Problem
  - Transportproblem

- Branch & Bound → sukzessive Aufteilung des Zulässigkeitsbereich "Branching"
  → Verwendung von unteren Schranken aus einer Relaxation zum Abschneiden uninteressanter Teile: "Bounding".

- Lagrange-Relaxation

7.16 Satz (Beziehung zwischen Lagrange Relaxation und LP Relaxation)

- $\max_\lambda L(\lambda) \geq z(LP)$
- Gleichheit gilt falls das von $Bx \geq d$ erzeugte Polyeder ganzzahlig ist (also die Ganzzahligkeitsbedingung in (LR_λ) weggelassen werden kann.

- LP-Relaxation nie besser als Lagrange-Relaxation.

⇒ LR ist interessant in B & B

und: Lösung von LR oft leicht: kombinatorisches oder als LP: analytisches Problem.

- Schnittebenenverfahren:
  - ggz. Hülle P_I von Zulässigkeitsbereich P ist konvexe Hülle der ggz. Punkte von P

- Gomory-Chvátal-Schnitte:

$y \geq 0$ mit $y^T A$ ganzz., $y^T b$ nicht-ganzz.

$\Rightarrow y^T A x \leq \lfloor y^T b \rfloor$ ist gültig.

- $$P^{(1)} := \bigcap_{\substack{y^T A \text{ ganzz.} \\ y \geq 0}} \{x \in P \mid y^T A x \leq \lfloor y^T b \rfloor\}$$

endlich viele genügen

heißt erste Chvátal-Hülle von P

- Chvátal-Abschluss:

7.24 Satz (Die Hüllenbildung ist endlich)

Sei P ein rationales Polytop. Dann existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit $P_I = P^{(k)}$.
Insbesondere terminiert das Schnittebenenverfahren bei geigneter Auswahl von Gomory Chvátal Schnitten nach endlich vielen Schritten.

- man erhält in endlich vielen Schritten eine lineare Beschreibung von P_I.

- Polyeder kombinatorischer Optimierungsprobleme
  - Matching
  - Antiketten partieller Ordnungen
  - TSP

- LP-basierte Approximationsalgorithmen
  - (randomisiertes) Runden, z.B. Max-SAT
  - primal-dual, z.B. Network-Design