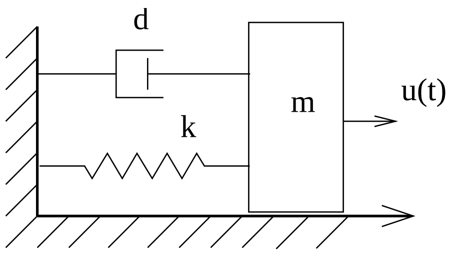
Technische Universität Berlin Wintersemester 2008/2009
Institut für Mathematik
Dr. T. Stykel 18. Oktober 2008

Numerische Methoden zur Modellreduktion

1. Übungsblatt zur Vorlesung

Besprechung des Übungsblattes in der Übung am 23.10.2008

Aufgabe 1: (Feder-Masse-Dämpfer System)



Betrachten Sie ein einfaches Feder-Masse-Dämpfer System mit einer auf die Masse m in x-Richtung wirkenden externen Kraft $u(t)$. Wählt man als Eingang des Systems die Kraft $u(t)$, als Zustandsgrößen die Position $p(t)$ und die Geschwindigkeit $v(t)$ der Masse und als Ausgang die Position, so erhält man das Steuerungssystem

$$\begin{aligned} \dot{p}(t) &= v(t), \\ m\,\dot{v}(t) &= -kp(t) - dv(t) + u(t), \\ y(t) &= p(t). \end{aligned} \tag{1}$$

Hier ist k eine Steifigkeitskonstante und d ist eine Dämpfungskonstante.

a) Bestimmen Sie die Lösung von (1) mit den Anfangswerten $p(0) = p_0$ und $v(0) = 0$ für die Steuerungsfunktionen $u(t) = 0$ (freies System) und $u(t) = e^{-t}$.

b) Berechnen Sie die Impulsantwort $Y_\delta(t)$ von (1).

c) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $G(s)$ von (1).

d) Überprüfen Sie das System auf Stabilität.

Aufgabe 2: (Laplace-Transformation)

Zeigen Sie, dass $\mathcal{L}(e^{At}) = (sI - A)^{-1}$ für $Re(s) > \max\limits_{1\le j\le n} Re(\lambda_j(A))$, wobei $\lambda_j(A)$ die Eigenwerte von A sind.

Aufgabe 3: (Realisierung)

Sei $[\,A,\, B,\, C,\, D\,]$ eine Realisierung der Übertragungsmatrix $G(s)$.

a) Bestimmen Sie eine Realisierung von $G^T(s)$.

b) Sei D invertierbar. Bestimmen Sie eine Realisierung von $G^{-1}(s)$.
Hinweis: Berechnen Sie die Inverse von

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} I & 0 \\ A_{21}A_{11}^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ A_{22}^{-1}A_{21} & I \end{bmatrix}. \end{aligned}$$