Technische Universität Berlin Wintersemester 2008/2009
Institut für Mathematik
Dr. T. Stykel 23. Oktober 2008

Numerische Methoden zur Modellreduktion

2. Übungsblatt zur Vorlesung

Besprechung des Übungsblattes in der Übung am 6.11.2008

Aufgabe 1: (Stabilität)

Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix

$$A_\varepsilon = \begin{bmatrix} -1 & 10 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 10 \\ \varepsilon & & & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n,n}$$

für $\varepsilon \geq 0$. Zeigen Sie anhand dieses Beispiels mit $n = 20$ und $\varepsilon = 10^{-18}$, dass kleine Störungen in A_0 zum Stabilitätsverlust führen können.

Aufgabe 2: (Kronecker-Produkt)

a) Seien W, X, Y, Z Matrizen geeigneter Dimension, so dass die Produkte WX und YZ definiert sind. Zeigen Sie, dass $(W \otimes Y)(X \otimes Z) = (WX) \otimes (YZ)$.

b) Seien S, G invertierbare Matrizen. Zeigen Sie, dass auch $S \otimes G$ invertierbar ist und dass $(S \otimes G)^{-1} = S^{-1} \otimes G^{-1}$.

c) Seien $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ und $B \in \mathbb{R}^{m,m}$. Die Matrix A habe die Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ und B habe die Eigenwerte $\mu_1, \dots, \mu_m$. Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{Sp}(A \otimes B) = \{\lambda_i \mu_j \,|\, i = 1, \dots, n;\ j = 1, \dots, m\}.$$

Aufgabe 3: (Konditionszahl der Lyapunov-Gleichung)

Die *Konditionszahl* der Lyapunov-Gleichung $A^T X + XA = -W$ mit $A, W \in \mathbb{R}^{n,n}$ ist definiert als

$$\kappa = 2\|A\|_F (\mathrm{Sep}(A))^{-1},$$

wobei $\mathrm{Sep}(A) = \min\limits_{\|X\|_F = 1} \|A^T X + XA\|_F$ die *Separation* ist.

a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Sep}(A) = \|(I_n \otimes A + A \otimes I_n)^{-1}\|_2^{-1}$.

b) Sei $\tilde{X}$ die Lösung der gestörten Lyapunov-Gleichung $\tilde{A}^T \tilde{X} + \tilde{X}\tilde{A} = -\tilde{W}$ mit $\|\tilde{A} - A\|_F \leq \varepsilon \|A\|_F$ und $\|\tilde{W} - W\|_F \leq \varepsilon \|W\|_F$. Zeige: Ist $\varepsilon\kappa < 1$, dann gilt

$$\frac{\|\tilde{X} - X\|_F}{\|X\|_F} \leq \frac{2\varepsilon\kappa}{1 - \varepsilon\kappa}.$$

Aufgabe 4: **(Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit)**

Uberprüfen Sie die folgenden Systeme auf Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit.

a) $\dot{x}(t) = x(t) + [\,0,\,0,\,\ldots,0,\,1]^T u(t), \quad y(t) = [\,0,\,\ldots,0,\,1\,]x(t)$

b)

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -d_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -d_1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & -d_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -d_{n-1} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u(t), \\ y(t) &= [\;0,\;\ldots,\;0,\;0,\;1\;]\,x(t)\end{aligned}$$

.