

## Numerische Methoden zur Modellreduktion

### 3. Übungsblatt zur Vorlesung

Besprechung des Übungsblattes in der Übung am 27.11.2008

#### Aufgabe 1: (Kalman-Zerlegung)

Sei  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n,m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{p,n}$  und  $\text{Rang}(A) = r_c < n$ ,  $\text{Rang}(A) = r_o < n$ . Zeigen Sie, dass es eine orthogonale Matrix  $V \in \mathbb{R}^{n,n}$  gibt, so dass

$$\begin{aligned} V^T A V &= \begin{bmatrix} A_{c\bar{o}} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ & A_{co} & A_{23} & A_{24} \\ & & A_{c\bar{o}} & A_{34} \\ & & & A_{\bar{o}o} \end{bmatrix}, & V^T B &= \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ CV &= [ 0, C_2, 0, C_4 ], \end{aligned}$$

wobei  $(A_{co}, B_2, C_2)$  steuerbar und beobachtbar ist.

#### Aufgabe 2: (Singularwertzerlegung)

Sei  $A = U\Sigma V^T$  die Singularwertzerlegung von  $A \in \mathbb{R}^{n,m}$ . Sei  $k \leq r = \text{Rang}(A)$  und  $A_k = \sum_{j=1}^k \sigma_j u_j v_j^T$ . Zeigen Sie, dass

$$\min_{\text{Rang}(X)=k} \|A - X\|_2 = \|A - A_k\|_2 = \sigma_{k+1}.$$

#### Aufgabe 3: (Gram'sche Matrizen der Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit)

Zeigen Sie, dass die Gram'schen Matrizen der Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit die folgende Darstellung haben

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (i\omega I - A)^{-1} B B^T (-i\omega I - A^T)^{-1} d\omega, \\ Q &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (-i\omega I - A^T)^{-1} C^T C (i\omega I - A)^{-1} d\omega. \end{aligned}$$

#### Aufgabe 4: (Programmieraufgabe)

(Abgabe bis zum 9.12.2008)

Schreiben Sie ein Programm zur Berechnung der Singulärwertzerlegung einer Matrix  $A$  und ihrer Approximationen  $A_{k1}$  und  $A_{k2}$  vom Rang  $k1$  und  $k2$ . Dabei soll dieses Programm aufrufbar sein als `[sv, Ak1, Ak2] = svd_bild(A, k1, k2)`, wobei `sv` alle Singulärwerte von  $A$  enthält.

Testen Sie ihr Programm mit einem Bild Ihrer Wahl im JPEG-Format. Dazu steht ein Programm `bild.m` auf der Webseite bereit.