Technische Universität Berlin Wintersemester 2008/2009
Institut für Mathematik
Dr. T. Stykel 26. Januar 2009

Numerische Methoden zur Modellreduktion

5. Übungsblatt zur Vorlesung

Besprechung des Übungsblattes in der Übung am 15.01.2008

Aufgabe 1: (Partielle Realisierung)

Gegeben sei die Übertragungsfuktion $G(s) = \sum_{k=1}^{\infty} M_k s^{-k}$ des SISO-Systems. Entwickeln Sie ein Verfahren, welches für endlich viele bekannte Markov-Parameter $M_1, \ldots, M_{2r}$ eine rationale Funktion

$$\tilde{G}(s) = \frac{z_0 + z_1 s + \ldots + z_{r-1} s^{r-1}}{d_0 + d_1 s + \ldots + d_{r-1} s^{r-1} + s^r}$$

konstruiert, deren erste $2r$ Markov-Parameter mit denen von $G(s)$ übereinstimmen.

Aufgabe 2: (Stabilität)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ symmetrisch und stabil, d.h., $A = A^T$ und $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{C}_-$, und sei V eine orthonormale Basis des Krylov-Raums $\mathcal{K}_r(A, B)$. Zeigen Sie, dass $V^T A V$ auch symmetrisch und stabil ist.
Hinweis: Für eine symmetrische, positiv definite Matrix M sind die Extremwerte des Rayleigh-Quotientes

$$R_M(x) = \frac{x^T M x}{x^T x}, \quad x \neq 0\,,$$

der kleinste und größte Eigenwert von M.

Aufgabe 3: (Krylov-Raum-Verfahren für Lyapunov-Gleichungen)

Die Krylov-Raum-Verfahren können auch zur Lösung der Lyapunov-Gleichung

$$AP + PA^T = -BB^T$$

mit $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ und $B \in \mathbb{R}^n$ angewendet werden. Dabei wird eine Nährungslösung der Form $\tilde{P} = V_k P_k V_k^T$ gesucht, wobei $V_k \in \mathbb{R}^{n,k}$ eine orthonormale Basis des Krylov-Raums $\mathcal{K}_k(A, B)$ ist, so dass das Residuum

$$\mathcal{R}(\tilde{P}) = A\tilde{P} + \tilde{P}A^T + BB^T$$

die Galerkin-Bedingung $V_k^T \mathcal{R}(\tilde{P}) V_k = 0$ erfüllt. Zeigen Sie:

a) Die Galerkin-Bedingung führt auf die Lyapunov-Gleichung $H_k P_k + P_k A_k^T = -B_k B_k^T$ mit $H_k = V_k^T A V_k \in \mathbb{R}^{k,k}$ und $B_k = V_k^T B \in \mathbb{R}^k$, die mit einem direkten Verfahren gelöst werden kann.

b) Falls V_k mit dem Arnoldi-Verfahren berechnet ist, ist die Residuennorm gegeben durch $\|\mathcal{R}(\tilde{P})\|_F = \sqrt{2}\|h_{k+1,k} e_k^T P_k\|_F$.

Aufgabe 4: **(Wärmeverteilung in einem Stab)**

Gegeben sei die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial T}{\partial t}(z,t) = \frac{\partial^2 T}{\partial^2 z}(z,t) - 2\eta \frac{\partial T}{\partial z}(z,t), \quad t \geq 0, \ \ z \in (0,1), \ \ \eta \geq 0,$$

mit den Randbedingungen

$$\frac{\partial T}{\partial z}(0,t) = u(t), \qquad T(1,t) = 0.$$

Hier ist $T(z,t)$ die Temperatur zur Zeit $t \geq 0$ an einem Ortspunkt z in einem Brennstab, der auf der linken Ende mit der Temperatur u(t) erhitzt wird. Die Temperatur kann im Punkt $z = 1/2$ gemessen werden. Führen Sie eine Ortsdiskretisiering durch. Definiren Sie dazu für eine Schrittweite $h = 1/(2q)$ die Funktionen $T_j(t) = T(jh,t)$, $j = 0,\ldots,2q$, und approximieren Sie die auftretenden Ortsableitungen durch finite Differenzen

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}(jh,t) &\approx \frac{T_{j+1}(t) - 2T_j(t) + T_{j-1}(t)}{h^2}, & j = 1,\ldots,2q-1, \\ \frac{\partial T}{\partial z}(jh,t) &\approx \frac{T_{j+1}(t) - T_{j-1}(t)}{2h}, & j = 0,\ldots,2q-1. \end{aligned}$$

Erstellen Sie damit ein lineares Steuerungssystem der Form $\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx$ mit dem Zustandsvektor $x = [\,T_1,\ldots,T_{2q-1}]^T$ und den geeigneten Matrizen A, B und C.

Aufgabe 5: **(Programmieraufgabe (Abgabe bis zum 3.02.2009))**

Schreiben Sie drei MATLAB-Programme zur Erstellung der Systemmatrizen `A`, `B`, `C` des asymptotisch stabilen Steuerungssystems aus Aufgabe 4 und zur Berechnung der reduzierten Systeme mit Hilfe des balancierten Abschneidens und der Arnoldi-Verfahren. Das erste Program soll aufrufbar sein als

$$[\mathtt{A},\mathtt{B},\mathtt{C}] = \mathtt{stab(q,eta)}.$$

Das zweite Program soll aufrufbar sein als

$$[\mathtt{Ar},\mathtt{Br},\mathtt{Cr},\mathtt{hsv},\mathtt{errb}] = \mathtt{btmor(A,B,C,tol)},$$

wobei `Ar`, `Br`, `Cr` die Systemmatrizen des reduzierten Systems sind, `hsv` ist ein Vektor mit den Hankel-Singulärwerten σ_j, `errb`$= 2(\sigma_{r+1} + \ldots + \sigma_n)$ ist die Fehlerschranke, und `tol` ist eine Toleranz zur Bestimmung der Ordnung r des reduzierten Systems, die die Bedingung `errb` $\leq$ `tol` erfüllt. Zur Lösung der Lyapynov-Gleichungen benutzen Sie die MATLAB-Funktion `sfm_lyap` aus Übungsblatt 4. Das dritte Programm soll aufrufbar sein als

$$[\mathtt{Ar},\mathtt{Br},\mathtt{Cr}] = \mathtt{arnmor(A,B,C,s0,r)},$$

wobei `s0` $\in \mathbb{C}$ ein Entwicklungspunkt ist.

Die Programme sollen mit `test_mor.m` von der Webseite getestet werden.