Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Dr. T. Stykel

Wintersemester 2008/2009

26. Januar 2009

Numerische Methoden zur Modellreduktion

6. Übungsblatt zur Vorlesung

Besprechung des Übungsblattes in der Übung am 29.01.2009

Diskrete lineare Systeme

Statt eines zeitkontinuierlichen Verlaufs gehen wir davon aus, dass wir den Zustand des Systems, Ein- und Ausgänge nur noch zu diskreten Zeitpunkten $t_0, t_1, \ldots$ kennen. Mit $x_k := x(t_k)$, $u_k := u(t_k)$, $y_k := y(t_k)$ erhalten wir ein diskretes lineares zeitinvariantes Steuerungssystem

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k, \quad x_0 = x^0, \\ y_k &= Cx_k + Du_k, \end{aligned} \tag{1}$$

wobei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, $B \in \mathbb{R}^{n,m}$, $C \in \mathbb{R}^{p,n}$ und $D \in \mathbb{R}^{p,m}$.

Aufgabe 1: (Z-Transformation, Übertragungsmatrix, Impulseantwort)

Sei $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ eine Zahlenfolge. Falls $\hat{x}(z) = \mathbf{Z}[x_k] = \sum_{k=0}^{\infty} x_k z^{-k}$ existiert, so heißt $\mathbf{Z}[x_k]$ die *unilaterale* $\mathbf{Z}$*-Transformation* von x_k. Diese Transformation ist das Analogon zur Laplace-Transformation zeitkontinuierlicher Signale.

a) Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften der unilateralen $\mathbf{Z}$-Transformation:

   1. Linearität: $\mathbf{Z}[ax_k + b\,y_k] = a\mathbf{Z}[x_k] + b\,\mathbf{Z}[x_k]$
   2. Verschiebung: $\mathbf{Z}[x_{k+j}] = z^j\Big(\mathbf{Z}[x_k] - \sum\limits_{i=0}^{j-1} x_i z^{-i}\Big)$;

b) Bestimmen Sie mit Hilfe der unilateralen $\mathbf{Z}$-Transformation die Übertragungsmatrix $G(z)$ vom System (1).

c) Bestimmen Sie die Impulsantwort vom System (1), die als Ausgangsfolge des Matrixsystems

$$\begin{aligned} X_{k+1} &= AX_k + BU_k, \quad X_0 = 0, \\ Y_k &= CX_k + DU_k \end{aligned}$$

mit der Eingangsfolge $U_k = \delta_{k,0} I$ definiert ist.

Aufgabe 2: (Asymptotische Stabilität und Stein-Gleichungen)

Man definiert *asymptotische Stabilität* von $x_{k+1} = Ax_k$ durch $\lim_{k\to\infty} x_k = 0$.

a) Zeigen Sie, dass das freie System $x_{k+1} = Ax_k$ genau dann asymptotisch stabil ist, wenn für alle $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ gilt: $|\lambda| < 1$.

b) Geben Sie notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz einer eindeutigen Lösung der *Stein-Gleichung* (diskrete Lyapunov-Gleichung)

$$AXA^T - X + W = 0 \tag{2}$$

an.

c) Zeigen Sie, dass die Stein-Gleichung (2) für asymptotisch stabile diskrete Systeme eine eindeutige Lösung der Form

$$X = \sum_{j=0}^{\infty} A^j W (A^T)^j$$

hat.

d) Sei das System (1) asymptotisch stabil. Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{Sp}(A) \subset \left\{ s \in \mathbb{C} \quad : \quad |s| \leq \sqrt{1 - \frac{1}{\|X\|_2}} \right\},$$

wobei X eine symmetrische Lösung der Stein-Gleichung (2) mit $W = I$ ist.

<u>Aufgabe 3:</u> (Gramsche Matrizen)

Für asymptotisch stabile diskrete Systeme lässen sich die Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit wieder mit Hilfe der Gramschen Matrizen der Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit

$$P = \sum_{j=0}^{\infty} A^j B B^T (A^T)^j, \qquad Q = \sum_{j=0}^{\infty} (A^T)^j C^T C A^j$$

charakterisieren.

a) Zeigen Sie, dass (A, B) genau dann steuerbar ist, wenn $P > 0$.

b) Zeigen Sie, dass (A, C) genau dann beobachtbar ist, wenn $Q > 0$.

<u>Aufgabe 4:</u> (Verfahren des balancierten Abschneidens)

Geben Sie das Verfahren des balancierten Abschneidens für diskrete Systeme an.