

1. Übung Stochastische Modelle

Abgabe: 30.10.2008 (in der Übung)

1. Aufgabe

(5 Punkte)

- a) Berechnen Sie die charakteristische Funktion einer Poisson-verteilten Zufallsvariablen. Nutzen Sie die Lösung, um zu beweisen:

$$X \sim \text{Pois}(\mu), Y \sim \text{Pois}(\lambda) \text{ unabhängig} \Rightarrow X + Y \sim \text{Pois}(\mu + \lambda).$$

- b) Der Zufallsvektor $X = (X_1, \dots, X_d)$ sei normalverteilt in \mathbb{R}^d mit Erwartungswertvektor $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_d)$ und Kovarianzmatrix Σ , d.h. für $t = (t_1, \dots, t_d)$ ist die charakteristische Funktion gegeben durch

$$\psi_X(t) = E \left[e^{i\langle t, X \rangle} \right] = e^{i\langle t, \mu \rangle - \frac{1}{2} \langle t, \Sigma t \rangle}.$$

Zeigen Sie, dass für alle $\alpha_1, \dots, \alpha_d \in \mathbb{R}$ die Zufallsvariable

$$\alpha_1 X_1 + \dots + \alpha_d X_d$$

normalverteilt in \mathbb{R} ist. (Beachten Sie, dass Unkorreliertheit und damit die Unabhängigkeit der Komponenten des Vektors X nicht angenommen wurde.)

2. Aufgabe

(5 Punkte)

Es sei (X_n) eine inhomogene Markovkette mit Zustandsraum S und Übergangswahrscheinlichkeiten $(p_{ij}^n)_{(i,j) \in S \times S, n \in \mathbb{N}}$. Wobei $p_{ij}^n = P[X_n = j | X_{n-1} = i]$ ist. Man gebe einen Zustandsraum T und die Übergangswahrscheinlichkeiten einer homogenen Markovkette (Y_n) an, die in einer eins-zu-eins-Beziehung zu (X_n) steht.

3. Aufgabe

(5 Punkte)

Es sei (E, \mathcal{E}) ein meßbarer Raum, wobei die Menge E höchstens abzählbar ist. Eine Folge $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ von E -wertigen Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P) wird *Markovkette r -ter Ordnung* genannt, falls für alle $B \in \mathcal{E}$ und alle ganzzahligen $n \geq r - 1$

$$P(X_{n+1} \in B | \sigma(X_m, m \leq n)) = P(X_{n+1} \in B | \sigma(X_m, n - r + 1 \leq m \leq n)).$$

Beweisen Sie, dass die Folge $Y_n := (X_n, \dots, X_{n+r-1})$ eine E^r -wertige Markovkette im gewöhnlichen Sinne ist.