Beweis der Assoziativität der Multplikation von Polynomen

Definiere die Menge aller Polynome über $\mathbb{R}$ durch

$$\mathbb{R}[t] = \{\sum_{j=0}^{n} a_k t^k \mid a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}\}.$$

Seien $p, q \in \mathbb{R}[t]$, d.h. es gibt $m, n \in \mathbb{N}$ mit

$$p(t) = \sum_{j=0}^{n} p_k t^k,\ q(t) = \sum_{j=0}^{m} q_k t^k.$$

Sei nun $m \leq n$ (der Fall $m > n$ geht analog), dann setze

$$q_{m+1} = q_{m+2} = \cdots = q_n = q_{n+1} = \cdots = q_{2n} = 0,\ p_{n+1} = \cdots = p_{2n} = 0$$

und definiere die Multiplikation wie folgt

$$p(t) \cdot q(t) = \sum_{k=0}^{2n} \gamma_k t^k \text{ mit } \gamma_k = \sum_{i+j=k} p_i q_j.$$

Sei z.B. $p(t) = p_0 + p_1 t + p_2 t^2 = 1 + 2t + 3t^2$ und $q(t) = q_0 + q_1 t = 4 + 5t$, dann ist

$$\begin{aligned} p(t) \cdot q(t) = & \underbrace{p_0 \cdot q_0}_{i+j=0} + (\underbrace{p_0 \cdot q_1 + p_1 \cdot q_0}_{i+j=1})t + (\underbrace{p_0 q_2 + p_1 q_1 + p_2 q_0}_{i+j=2})t^2 \\ & + (\underbrace{p_0 q_3 + p_1 q_2 + p_2 q_1 + p_3 q_0}_{i+j=3})t^3 + (\underbrace{p_0 q_4 + p_1 q_3 + p_2 q_2 + p_3 q_1 + p_4 q_0}_{i+j=4})t^4 \\ =& (1 \cdot 4) + (1 \cdot 5 + 2 \cdot 4)t + (1 \cdot 0 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 4)t^2 \\ & + (1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 5 + 0 \cdot 4)t^3 + (1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 0 \cdot 5 + 0 \cdot 4)t^4 \\ =& 4 + 13t + 22t^2 + 15t^3. \end{aligned}$$

Nun zeigen wir das Assoziativgesetzt der Multiplikation:

Seien dazu $p(t) = \sum\limits_{j=0}^{n} p_j t^j, q(t) = \sum\limits_{j=0}^{n} q_j t^j, r(t) = \sum\limits_{j=0}^{n} r_j t^j$, dann gilt

$$(p(t) \cdot q(t)) \cdot r(t) = (\sum_{k=0}^{2n} \underbrace{(\sum_{i+j=k} (p_i q_j))}_{=\gamma_k} t^k) \cdot (\sum_{l=1}^{n} r_l t^l)$$

$$= \sum_{m=0}^{3n} \sum_{k+l=m} (\gamma_k r_l) t^m = \sum_{m=0}^{3n} \sum_{k+l=m} (\sum_{i+j=k} (p_i q_j) r_l) t^m \overset{Ass. in \mathbb{R}}{=} \sum_{m=0}^{3n} \sum_{k+l=m} (\sum_{i+j=k} p_i (q_j r_l)) t^m$$

$$\overset{Indextausch}{=} \sum_{m=0}^{3n} \sum_{i+k'=m} (\sum_{j+l=k'} p_i (q_j r_l)) t^m \overset{Distrib. in \mathbb{R}}{=} \sum_{m=0}^{3n} \sum_{i+k'=m} p_i \underbrace{(\sum_{j+l=k'} (q_j r_l))}_{\gamma'_{k'}} t^m$$

$$= \sum_{m=0}^{3n} \sum_{i+k'=m} p_i \gamma'_{k'} t^m = (\sum_{i=0}^{n} p_i t^i) \cdot (\sum_{k'=0}^{2n} \gamma'_{k'} t^{k'}) = p(t) \cdot (q(t) \cdot r(t)).$$